INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
Amigo 친구 global games 2025

Preguntas

Pregunta

1) (a) sean x_1,x_2,x_3 tres vectores distintos entre sí en $(Z/3Z)^n$ tales que $x_1=0$ y $x_2+x_3\neq 0$. Sean y_1,y_2,y_3 otro conjunto de tres vectores distintos entre sí tales que $y_1+y_2+y_3\neq 0$. Demuestre que existe una transformación afín (es decir, una transformación lineal compuesta con una traslación) A tal que $A(x_i)=y_i$.
(b) Ahora considere los ocho vectores, en $(Z/3Z)^3$, dados por: $x_1=(0,0,0)$ $x_2=(1,1,0)$ $x_3=(0,0,1)$ $x_4=(1,1,1)$ y $y_1=(0,0,0)$ $y_2=(1,0,0)$ $y_3=(0,1,0)$ $y_4=(0,0,1)$ Demuestre que no existe ninguna transformación afín que mande cada x_i al correspondiente y_i.

2) Considere una cuadrícula S de enteros de tamaño m por n
$S_{1,1}$ $S_{1,2}$ ... $S_{1,n}$ . . . . $S_{m,1}$ $S_{m,2}$ ... $S_{m,n}$
Decimos que la entrada {i,j} en esta cuadrícula es "crítica" si $S_{i,j} > 3$.
Si una cuadrícula tiene al menos una entrada crítica, decimos que esta cuadrícula es "inestable", de lo contrario la llamamos "estable".
Si la entrada {i,j}-ésima de S es crítica, definimos una "operación de volcado" formando una nueva cuadrícula S' con entradas iguales a las de S, excepto $S'_{i,j}$ *cuyo valor se obtiene restando 4 de* $S_{i,j}$, y sus vecinos superior, inferior, izquierdo y derecho, cuyos valores se obtienen aumentando en 1 sus valores originales. Si la entrada crítica no tiene todos los cuatro vecinos, aún así restamos 4 de su valor y aumentamos en 1 cada uno de los vecinos disponibles. De esta manera, S y S' diferirán como máximo en 5 entradas.
Demuestre que cualquier cuadrícula, después de un número finito de aplicaciones de operaciones de volcado, converge a una única cuadrícula estable, que llamamos su "estabilización". Demuestre que este número no depende de la elección del orden de las operaciones de volcado. Escriba un programa que tome como entrada una cuadrícula S de enteros no negativos y genere como salida 1) su estabilización S' y 2) el número de operaciones de volcado requeridos para llegar a S'
Ejemplos ("Entrada:" y "Salida:" sólo son encabezados y NO SON parte de la entrada y salida del programa)
Entrada:
2 2
2 4

Salida:
3 3
3 0
1
Entrada:
3 5 4 2
2 3 4 8
1 1 1 1
Salida:
2 2 1 2
1 0 2 3
2 3 3 3
13

3) Fijemos un número entero positivo n. Por una red entendemos un diagrama que consiste en cables y barras, como en la Figura 1.
Una n-coloreación admisible de la red es una asignación de una permutación a cada barra (cada barra actúa como un conector que permuta las hebras que la atraviesan) tal que • El diagrama resultante es una colección de n aros disjuntos (cada aro representa un color). • Ningún aro atraviesa la misma barra más de una vez. Una coloreación admisible queda completamente determinada por la elección de las permutaciones que reemplazan a las barras. Por ejemplo, consideremos la Figura 2, el ejemplo de la izquierda tiene la permutación identidad en cada barra y es una 4-coloreación admisible. Sin embargo, el ejemplo de la derecha no es una 3-coloreación admisible, ya que el aro externo atraviesa una barra más de una vez.
Ejercicio: en la red de la Figura 3, • Encuentra las 6-coloreaciones admisibles. • Encuentra las 5-coloreaciones admisibles. (Cada coloración en su respuesta debe ser presentada en forma de dibujo.)

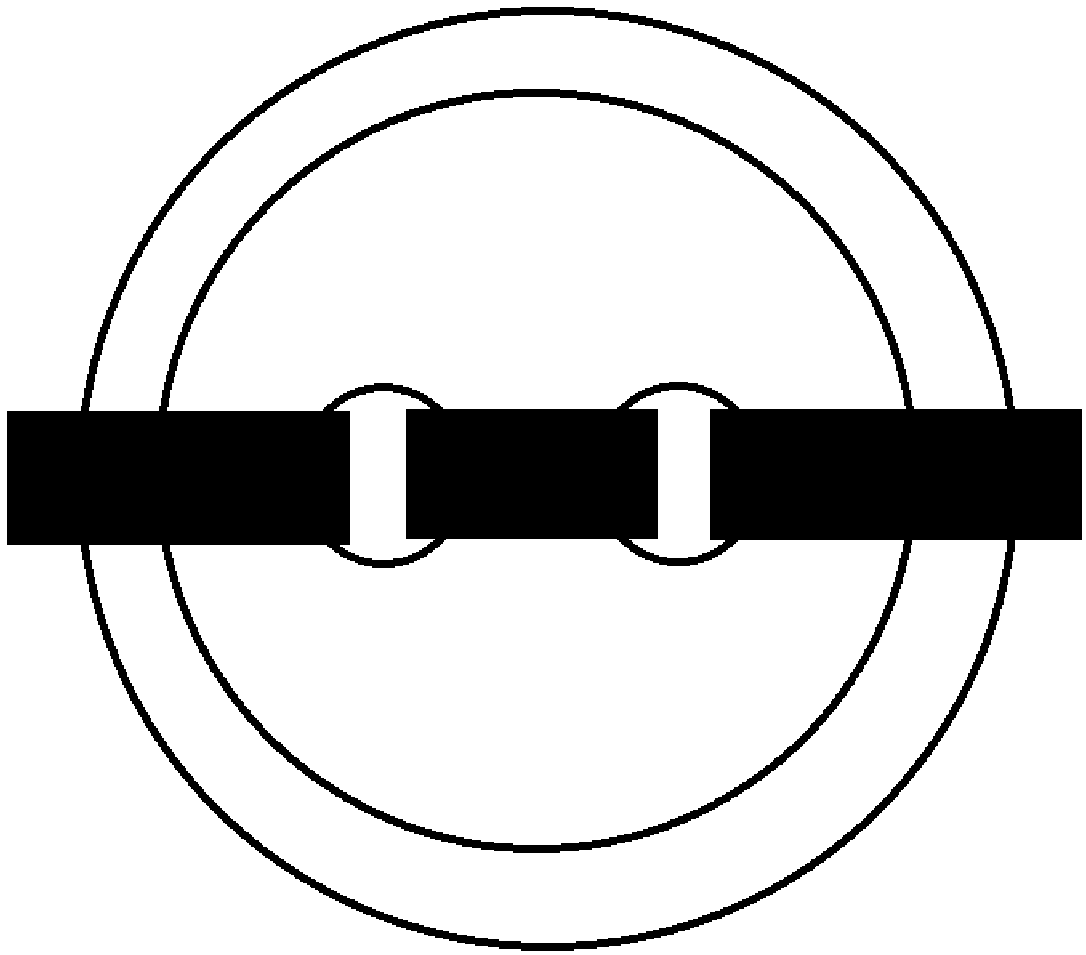

Figura 1

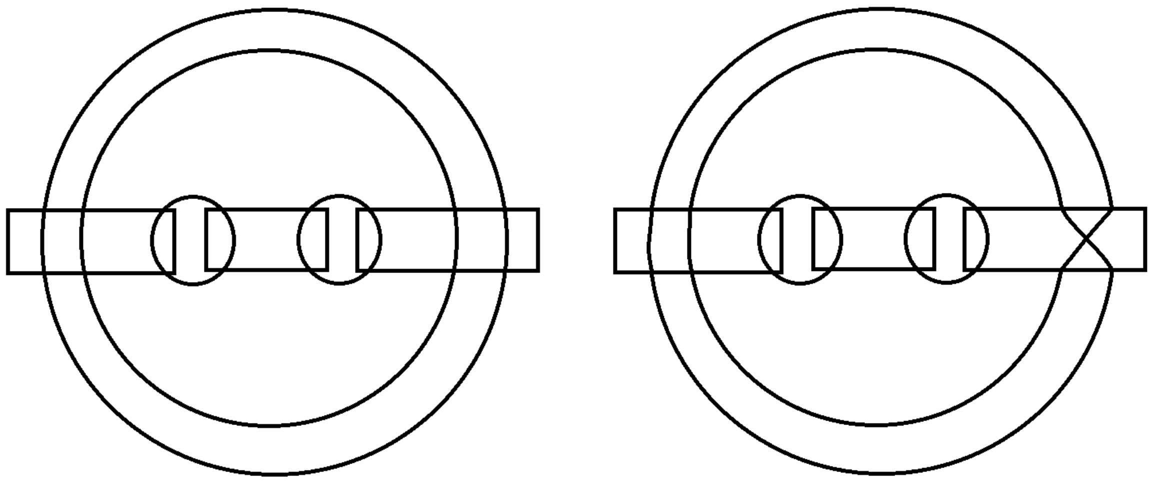

Figura 2

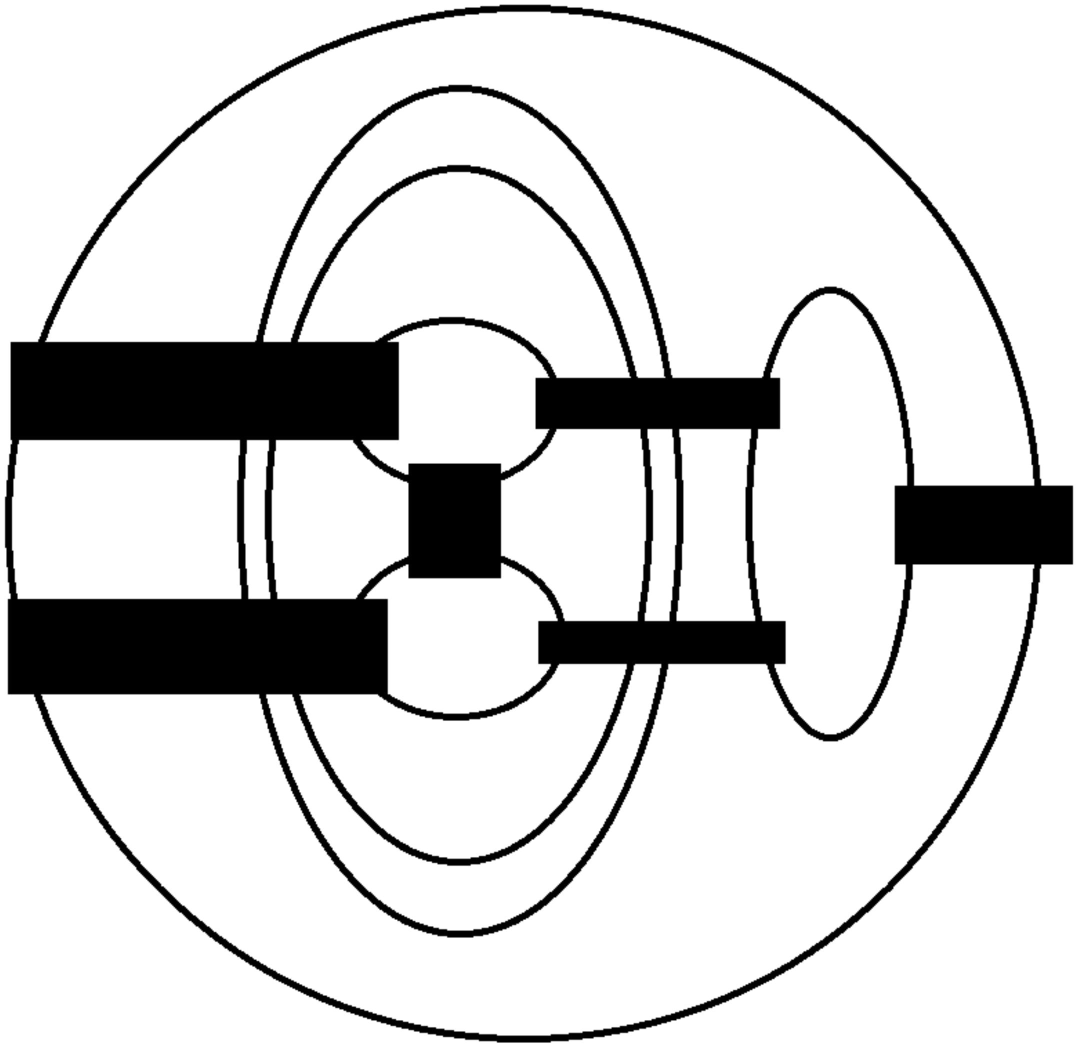

Figura 3