INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas

Guía de probabilidad para el examen de admisión a la Maestría en Administración

Juárez Jiménez Susana
Santiago Sosa Itzamat Tonatiuh
Zavala Huerta Alejandro

ÍNDICE

PROLOGO 6
Introducción 6
1.1 MODELOS MATEMATICOS 7
1.1.1 Modelo Determinístico 7
1.1.2 Modelo Probabilístico o Estocástico 8
1.1.3 Experimento aleatorio o probabilístico 8
1.1.4 Experimento determinístico 8
1.1.5 Espacio muestral 9
1.1.6 Evento 9
1.1.6.1 Evento simple 9
1.2 INTERPRETACIONES DE LA PROBABILIDAD 10
1.2.1 Corriente frecuentista 10
1.2.2 Corriente clásica (a priori) 11
1.2.3 Corriente subjetiva 12
1.2.4 Corriente Bayesiana (a posteriori) 13
1.3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES SOBRE EVENTOS 13
1.3.1 Tipos de eventos 14
1.3.1.1 Evento finito 14
1.3.1.2 Evento vacío o no realizable 14
1.3.1.3 Evento infinito 15
1.3.2 Relaciones fundamentales entre eventos 15
1.3.2.1 Igualdad de eventos 15
1.3.2.2 Subeventos 15
1.3.2.3 Eventos mutuamente excluyentes 16
1.3.3 Operaciones fundamentales entre eventos 16
1.3.3.1 Unión entre eventos 16
1.3.3.2 Intersección entre eventos 16
1.3.3.3 Diferencia entre eventos 16
1.3.3.4 Evento complementario o complemento de evento 16
1.4 Axiomatización de la probabilidad 17
EJERCICIOS 17
2.1 TÉCNICAS DE CONTEO Y PROBABILIDAD 19

2.1.1 Multiplicación 19
2.1.1.1 Arreglos con repetición (reemplazo) 19
2.1.1.2 Arreglos sin repetición (permutaciones) 20
2.1.2 Factorial de un número 20
2.1.3 Permutaciones 21
2.1.3.1 Permutaciones con elementos iguales 21
2.1.4 Combinaciones 22
2.1.5 Reglas de la suma 23
2.1.6 Aplicación de las técnicas de conteo a la probabilidad 24
EJERCICIOS 25
3.1 PROBABILIDAD CONDICIONAL 27
3.1.1 Regla de la multiplicación de la multiplicación de probabilidades 28
3.1.2 Empleo de los diagramas de árbol en la probabilidad condicional 29
3.2 Eventos independientes 32
3.3 Teorema de Bayes 33
PREGUNTAS 35
EJERCICIOS 36
VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS 37
4.1 VARIABLES ALEATORIAS 37
4.2 VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS (VAD) 37
4.3 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD 38
4.3 Función de probabilidad 38
4.4 Distribución de probabilidad 39
4.5 Función de distribución acumulada (FDA) 39
4.4 VALOR ESPERADO DE UNA VAD 40
4.6 Valor esperado de X 40
4.4.1 PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO DE UNA VAD 40
4.5 VARIANZA DE UNA VAD 40
4.7 Varianza 41
4.8 Desviación estándar 41
4.5.1 PROPIEDADES DE LA VARIANZA DE UNA VAD 41
EJERCICIOS DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS 41
PREGUNTAS DE VAD 42
EJERCICIOS DE VAD 43

MODELOS DISCRETOS DE PROBABILIDAD..44
4.6 MODELO BINOMIAL..44
4.9 Experimento binomial..44
4.10 Ensayos de Bernoulli..44
4.11 Variable aleatoria binomial..44
4.6.1 CÁLCULO DE PROBABILIDADES D ELOS MODELOS BINOMIALES Y USO DE TABLAS BINOMIALES..45
EJERCICIOS..46
4.7 MODELO GEOMÉTRICO..47
4.12 Experimento geométrico..47
4.13 Variable aleatoria geométrica..47
EJERCICIOS..48
4.8 MODELO HIPERGEOMÉTRICO..49
4.14 Experimento Hipergeométrico..49
4.15 Variable aleatoria hipergeométrica..49
EJERCICIOS..50
4.9 MODELO DE POISSON..50
4.15 Variable aleatoria de Poisson..50
EJERCICIOS..52
PREGUNTAS DE MODELOS DISCRETOS..52
VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS..53
5.1.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD..54
5.1.2 FUNCIÓN ACUMULADA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA..54
5.1.2A PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA..54
5.2 VALOR ESPERADO Y VARIANCIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA..55
5.2.1 PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO DE UNA VAC..55
5.2.1 VARIANCIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA..56
5.2.1 PROPIEDADES DE LA VARIANCIA DE UNA VAC..56
EJERCICIOS VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS..57
MODELOS CONTINUOS DE PROBABILIDAD..60
5.2 MODELO EXPONENCIAL..60
EJERCICIOS 1..63
5.4 MODELO NORMAL..63
5.4.1. CÁLCULO DE PROBABILIDADES..64
5.4.2 PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR..66

5.4.2 USO DE TABLAS DE LA FUNCIÓN ACUMULADA 66
5.4.2 USO DE TABLAS PORCENTUALES 69
EJERCICIOS 2 1
EJERCICIOS MODELOS CONTINUOS 2
6.1 Errores comunes en procesos estadísticos y como evitarlos 3
6.1.1 Errores 3
6.1.2 Como evitar los errores más comunes 4
CONCLUSIONES 5
Reflexión 5
Bibliografía 6
Ejemplo examen de Probabilidad 7

PROLOGO

Esta guía de estudio para el examen de probabilidad mejorada fue realizada por los aspirantes a ingresar a la Maestría en Administración:

Juárez Jiménez Susana, Santiago Sosa Itzamat Tonatiuh, y Zavala Huerta Alejandro.

En el curso propedéutico de Probabilidad impartido por el M.I. Juan José Hurtado Moreno.

¡Gracias por sus enseñanzas profesor!

Ciudad de México, 26 de Mayo de 2022.

Introducción

El presente trabajo presenta una guía de preparación en el área de probabilidad; esta guía pretende ayudar al aspirante a la Maestría en Administración a preparase para presentar el examen de ingreso a dicha maestría, fortaleciendo el nivel académico.

Este trabajo está basado en la guía elaborada por el Dr. Eduardo Gutiérrez, profesor en la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales y Administrativas UPIICSA; así como en propuestas a la guía hechas por alumnos de generaciones anteriores.

Esta guía está diseñada para presentar al aspirante de manera practica y concisa la información requerida en el examen de ingreso. Presenta información teórica, definiciones y ejemplos de cada uno de los temas que forman parte del temario de examen de la materia de Probabilidad.

Se presentan también, ejercicios que ayudarán al aspirante a tener una preparación más completa de los temas, dichos ejercicios han sido actualizados permitiendo al aspirante tener una mejor comprensión.

Se incluye también un examen tipo para que la preparación del aspirante sea completa y obtenga un resultado favorable en el examen de ingreso.

1.1 MODELOS MATEMATICOS

Uno de los objetivos del estudio de las Ciencias es desarrollar estructuras conceptuales que permitan comprender los fenómenos que ocurren en la naturaleza y poder predecir sus efectos que de ellos se derivan. De la experiencia científica se deduce fácilmente que para poder estudiar un fenómeno es necesaria su imitación o reproducción en una cantidad suficiente para que su investigación sea lo más precisa posible. Esta necesidad es lo que da origen a los modelos.
Por modelo, entenderemos a la representación o reproducción de los fenómenos. Los modelos pueden ser de diferentes tipos, para nuestros objetivos nos interesarán modelos de tipo matemático.

> Definición 1.1 Modelo matemático
> Un **Modelo Matemático** es una representación simbólica de un fenómeno cualquiera, realizada con el fin de estudiarlo mejor. Por ejemplo: fenómenos físicos, económicos, sociales, etc.

Los modelos matemáticos los podemos clasificar en: determinísticos y probabilísticos.

$$\text{Modelo Matemático} \begin{cases} \text{Modelo Determinístico} \\ \text{Modelo Probabilístico o Estocástico} \end{cases}$$

1.1.1 Modelo Determinístico

En este modelo nosotros estamos controlando los diferentes parámetros que intervienen; por lo tanto, al establecer el modelo matemático correspondiente y los valores para los factores podemos predecir su resultado.

> Definición 1.1.1 Modelo determinístico
> Cuando se realiza el modelo matemático de un fenómeno y en él se pueden manejar los factores que intervienen en su estudio con el propósito de predecir sus resultados, lo llamaremos "**Modelo Determinístico**".

Ejemplo

El modelo de una compañía en donde dos productos se elaboran al pasar en forma sucesiva por tres máquinas. Ahí el tiempo por máquina asignado a los dos productos está limitado por una cantidad determinada de horas por día; igualmente, el tiempo de producción y la ganancia por capítulo de cada producto se pueden establecer de tal manera que combinando los productos podemos obtener una ganancia óptima.

1.1.2 Modelo Probabilístico o Estocástico

Definición 1.1.2 Modelo Probabilístico o Estocástico
A los modelos matemáticos de los fenómenos en los cuales no se pueden controlar los factores que intervienen en su estudio, y además dichos factores ocurren de manera tal que no es posible predecir sus resultados, los llamaremos "**Modelos Probabilísticos**".

Ejemplo

Si deseamos conocer el lugar de caída de un satélite que se salió de su órbita y se dirige a la tierra no podemos predecir el lugar donde él caerá, puesto que no podemos controlar su movimiento; por lo tanto, sólo es posible indicar una región en donde se cree caerá el satélite con un valor numérico que represente la aseveración.

1.1.3 Experimento aleatorio o probabilístico

Definición 1.1.3 Experimento Aleatorio o Probabilístico
Al proceso por el cual se describen los resultados que no se conocen y no se pueden predecir, lo llamaremos "**experimento aleatorio".**

Ejemplo

Observación de la cantidad de artículos defectuosos en un lote de 50 artículos, en donde existen 9 defectuosos. Se eligen los artículos sin reemplazo y se anotan los resultados hasta obtener el último defectuoso.

1.1.4 Experimento determinístico

Al realizar un experimento generalmente se registran sus resultados para obtener las conclusiones correspondientes al fenómeno en estudio, por lo que surge la necesidad de introducir un concepto referente al conjunto[1] de todos los resultados del experimento.

Definición 1.1.4 Experimento Determinístico
Al proceso por el cual se describen los fenómenos de los que se pueden predecir sus resultados, lo llamaremos "**experimento determinístico"**.

Ejemplo

La mezcla de sustancias químicas para la obtención de algún compuesto.

1.1.5 Espacio muestral

Definición 1.1.5 Espacio Muestral
Al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento probabilístico lo llamaremos "**Espacio Muestral del experimento**" y lo denotaremos por S. A los elementos de un espacio muestral los llamaremos **puntos muestrales**.

Ejemplo

Se realiza el experimento sobre el lanzamiento de una moneda 3 veces y anotan sus resultados posibles. En el espacio muestral a representa águila y s cara

S = $\{$sss, ssa, sas, ass, saa, asa, aas, aaa$\}$

1.1.6 Evento

Definición 1.1.6 Evento
Dado un experimento aleatorio y su espacio muestral S, se llama **evento** a un conjunto de resultados posibles de S. Fácilmente podemos notar que un evento, no es más que un subconjunto de un espacio muestral.

1.1.6.1 Evento simple

Definición 1.1.6.1 Evento simple
Al evento que consta de un sólo elemento le llamaremos **evento simple**.

Ejemplo

Se realiza el experimento sobre el lanzamiento de una moneda 3 veces y anotan sus resultados posibles.

Sea el evento
E: "Aparece una sola águila".
Representando águila por a y sol por s, el evento será:

E $\{$ssa, sas, ass$\}$

1.2 INTERPRETACIONES DE LA PROBABILIDAD

La palabra probabilidad es empleada por el ser humano con demasiada frecuencia; por ejemplo, en expresiones tales como: “Es probable que hoy estudie estadística”, “El equipo mexicano de fútbol está jugando mal, y es muy probable que en su siguiente partido pierda”, “El cielo está bastante despejado; por lo tanto, no hay muchas posibilidades de que hoy llueva”, etc. Como se pudo notar en las expresiones anteriores, las palabras relacionadas con la probabilidad tienen la característica de basarse en sucesos que pueden ser verdaderos y que a causa de los hechos observados; resultados preliminares; tiempo, etc. se puede hablar de la posibilidad de su ocurrencia.

A pesar de los esfuerzos realizados por muchos matemáticos para asignar de forma única la probabilidad a un suceso todo ha sido en vano puesto que, desde los inicios de su estudio hasta nuestros días, no tenemos una forma única de asignación de probabilidades. Con lo que contamos son con diferentes corrientes de probabilidad, las cuales se aplican para asignar un valor numérico a la posibilidad de la ocurrencia de algún suceso probabilístico. De hecho, el verdadero significado de la probabilidad sigue siendo conflictivo; por lo tanto, en lugar de comenzar el curso con una definición formal de probabilidad comentaremos sus 4 Corrientes más comunes.

1.2.1 Corriente frecuentista

En la corriente frecuentista -tal vez una de las más empleadas-, se asigna un valor de probabilidad a un evento E, a partir de lo que se considera que ocurrirá. Su definición o interpretación de la probabilidad está basada, como su título lo indica, en la frecuencia relativa[2] con la que se obtendría E, si el experimento se repite una gran cantidad de veces, en condiciones similares (no idénticas, puesto que en este caso el proceso no sería

> Definición 1.2.1 Corriente frecuentista
> Frecuencia relativa: la probabilidad de que un evento ocurra se determina observando en qué fracción de tiempo sucedieron eventos semejantes en el pasado.”.

aleatorio).

Ejemplo

Se lanza una moneda 3 veces y se cuenta la cantidad de soles que aparecen. Sea el evento E: “Obtención de dos soles en los tres lanzamientos”, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento E?

Para responder a la pregunta desde el punto de vista frecuentista, se debe de realizar el experimento una gran cantidad de veces. Supongamos que el experimento se repite 1000 veces en condiciones similares y como resultado se obtienen 400 casos con dos soles, en tal situación, se diría que la probabilidad de que ocurra E, será: $\frac{400}{1000} = 0.4$

Si ahora el experimento se repite 100,000 veces, de las cuales 38,000 resultan con dos soles, diríamos que la probabilidad de que ocurra E es:

$$\frac{38000}{100{,}000} = 0.38$$

Dado el ejemplo anterior, podríamos repetir nuestro experimento tantas veces como se quiera y obtener una frecuencia relativa para la probabilidad del evento E, pero surge la pregunta ¿por qué diferentes resultados para un mismo evento? La respuesta está en la interpretación de que entendemos por: "repetir el experimento una gran cantidad de veces", ¿qué se entiende por una gran cantidad de veces? y ¿cuál sería dicha cantidad de repeticiones? Estas condiciones son muy vagas para servir de base en una definición científica de probabilidad. Aunado a lo anterior en muchos de los fenómenos no podemos realizar una gran repetición de estos, por ejemplo:

a) Para calcular la probabilidad de que el lanzamiento de un cohete resulte exitoso. Evidentemente, no podemos realizar una gran cantidad de lanzamientos de cohetes, para que de esta manera se obtenga la probabilidad en forma frecuentista del éxito de un lanzamiento.

b) Para calcular la probabilidad de que Juan Pérez se case este año. En este caso tampoco podemos realizar una gran cantidad de repeticiones del experimento para indicar el valor numérico que represente desde el punto de vista de la frecuencia relativa de que Juan Pérez se casará o no este año.

1.2.2 Corriente clásica (a priori)

En la corriente clásica se consideran espacios muestrales uniformes, es decir se asigna probabilidades a eventos, basándose en resultados equiprobables (igualmente verosímiles). Esto es, los clasistas asignan la misma probabilidad a cada punto del espacio muestral (1/n, en donde n es la cantidad de elementos del espacio muestral), posteriormente para obtener la probabilidad de la ocurrencia de un evento E, se suma la cantidad de elementos de E, y se multiplica por la probabilidad de un elemento del espacio muestral (1/n). Cabe notar que de lo anterior se deduce, que la probabilidad de los puntos muestrales se establece a priori, es decir, antes de cualquier experimento.

> Definición 1.2.2 Corriente clásica
> La probabilidad clásica se basa en la consideración de que los resultados de un experimento son igualmente posibles empleando el punto de vista clásico, la probabilidad de que suceda un evento se calcula dividiendo el número de resultados favorables entre el número total de resultados posibles.

Algunas de las dificultades por las que atraviesa esta interpretación de probabilidad son:

a) En primer lugar, al hablar de resultados equiprobables (tienen la misma probabilidad), estamos empleando el concepto que se está definiendo.
b) En segundo lugar, cuando los resultados no son equiprobables.
c) En tercer lugar, no se indica un método para realizar el cálculo de las probabilidades.

Ejemplo

Se lanza una moneda equilibrada 3 veces y se anotan los resultados posibles que aparecen, sea el evento E: “Obtención de dos soles en los tres lanzamientos”, la pregunta es ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento E?
Para responder a la pregunta, desde el punto de vista clasista obtenemos el espacio muestral; representando águila por a y sol por s, tendremos:

$S = \{sss, ssa, sas, ass, saa, asa, aas, aaa\}$

En estos casos, ssa representa que los primeros 2 lanzamientos resultaron soles y el tercer lanzamiento águila. Considerando que cada punto del espacio muestral es equiprobable con probabilidad de ocurrencia 1/8, tendremos que la probabilidad del evento E (resulten dos soles en los tres lanzamientos), se resuelve al conocer la cantidad de elementos del evento:

$E = \{ssa, sas, ass\}$

como E contiene 3 elementos tenemos que la probabilidad de que ocurra el evento E es:
Probabilidad de E = 3 x 1/8 = 0.375

1.2.3 Corriente subjetiva

En la corriente subjetivista (esta interpretación de la probabilidad es muy empleada en el estudio de la Teoría de decisiones), se asignan probabilidades a eventos basándose en el conocimiento o experiencia que cada persona tiene sobre el experimento; por lo tanto, la probabilidad asignada está sujeta al conocimiento que el científico tenga con respecto al fenómeno estudiado. Para un mismo experimento las probabilidades asignadas por diferentes personas pueden ser distintas.
La interpretación subjetiva de la probabilidad tiene diferentes dificultades, una de ellas es la dependencia en el juicio de cada persona al asignarla, además que tal juicio debe estar completamente fuera de contradicciones lo que es sumamente difícil por depender de la persona que la asigne.
Podemos mencionar que en la asignación de probabilidades subjetivas se emplea en muchos casos el conocimiento frecuentista que se tenga del experimento.

Definición 1.2.3 Corriente subjetiva
Corriente en la que se asignan probabilidades a eventos basándose en el conocimiento o experiencia que cada persona tiene sobre el experimento

Ejemplo

Choque de meteoritos ¿Cuál es la probabilidad de que su automóvil sea impactado por un meteorito este año?
La ausencia de datos históricos de meteoritos que chocan contra automóviles impide usar el método de frecuencias relativas de la regla 1.

Hay dos posibles resultados (chocar o no chocar), pero no son igualmente probables, de tal forma que no podemos usar el método clásico. Esto nos deja con la probabilidad subjetiva, por medio de la cual hacemos un estimado subjetivo.
En tal caso, todos sabemos que la probabilidad en cuestión es muy, muy pequeña. Estimemos que sea, digamos, de 0.000000000001 (equivalente a una en un billón).

1.2.4 Corriente Bayesiana (a posteriori)

En la corriente bayesiana se asignan probabilidades a eventos, después del experimento. Es decir, las probabilidades son del tipo dependiente, esto es basándose en el conocimiento de la ocurrencia de eventos que estén en dependencia con el evento estudiado.

Como se puede comprender no se debe comenzar un estudio matemático de la teoría de las probabilidades si se quiere tener una forma universal de asignación de probabilidades para los diferentes eventos. Por lo tanto, es necesario estructurar a la probabilidad sobre una base axiomática que le dé el formalismo que el Álgebra, la Geometría y las otras áreas de las matemáticas tienen, esto se puede lograr haciendo uso de la teoría de conjuntos aplicada a los eventos, formando lo que se denomina "Álgebra de Eventos".
Podemos mencionar que en la asignación de probabilidades subjetivas se emplea en muchos casos el conocimiento frecuentista que se tenga del experimento.

> Definición 1.2.4 Corriente bayesiana
> Corriente en la que se asignan probabilidades a eventos, después del experimento. Las probabilidades son del tipo dependiente,

Ejemplo

En el caso anterior cuando se lanza una moneda equilibrada, 3 veces y se cuenta la cantidad de soles que aparecen, el evento E: "Obtención de dos soles en los tres lanzamientos", la pregunta es ¿cuál es la probabilidad de que ocurra el evento E?, si se sabe que el primer lanzamiento resultó un sol.

1.3 CONCEPTOS FUNDAMENTALES SOBRE EVENTOS

Notación de eventos. Al espacio muestral de un experimento lo denotamos por S, y a los eventos por letras mayúsculas, como son A, B, C, etc. A los resultados del experimento, que cumplen las condiciones del evento, se les representa por letras minúsculas, como son a, b, etc. Si el resultado a del experimento realizado pertenece al evento A, esto lo simbolizaremos $a \in A$, en caso de que no pertenezca, se simbolizará por $a \notin A$. Los eventos también se representan por llaves, dentro de las cuales se escriben sus elementos (¡sin repetirlos), o las propiedades que dichos elementos cumplen. Es decir,

S = espacio muestral
A, B, C…= Eventos representados por letras mayúscula
a, b, c…= Resultados del experimento representados con letras minúsculas
$a \in A$ = Si el resultado *a* del experimento realizado pertenece al evento *A*
$a \notin A$ = Si el resultado *a* del experimento realizado no pertenece al evento *A*

1.3.1 Tipos de eventos

Los eventos pueden ser:

$$\text{Evento} \left\{ \begin{array}{l} \text{Finito} \\ \text{Vacío o no realizable} \\ \text{infinito} \end{array} \right.$$

1.3.1.1 Evento finito

Definición 1.3.1.1 Evento finito
Si al contar los elementos de un evento resulta una cantidad determinada, entonces dicho evento se llama **finito**.

Ejemplo

A: Es un número par, resultado del lanzamiento de un dado, esto es, A = {2, 4, 6}.

A: Al menos se observan 4 soles en 6 lanzamientos de una moneda, esto es, A = {4, 5, 6}.

1.3.1.2 Evento vacío o no realizable

Definición 1.3.1.2 Evento vacío o no realizable
El Evento que no contiene ningún elemento, esto es, no existe algún resultado del experimento que cumpla las condiciones del evento se llama evento vacío.

Ejemplo

A: "Lanzamiento de un par de dados y que la suma de sus lados sea mayor a 13", esto es:
A = { } , el evento A no tiene ningún elemento. La máxima suma de las caras en el lanzamiento de dos dados es 12. El evento vacío, se suele simbolizar por ∅.

1.3.1.3 Evento infinito

> Definición 1.3.1.3 Evento infinito
> Si al contar los resultados posibles de un evento el proceso de conteo no termina con el tiempo, entonces el evento se llama infinito.

Ejemplo

E: "La cantidad de lanzamientos de una moneda hasta obtener la primer águila".

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, \ \}.$$

El evento cuyos elementos son todos los puntos del intervalo indicado en donde los extremos son diferentes,

$$E = (2,7).$$

1.3.2 Relaciones fundamentales entre eventos

1.3.2.1 Igualdad de eventos

> Definición 1.3.2.1 Igualdad de eventos
> Los eventos A y B correspondientes a un mismo experimento son iguales, si cualquier resultado de A es también elemento de B, y viceversa
>
> $A = B$, si $\forall a \in A$, entonces $a \in B$ y viceversa, $\forall b \in B$, entonces $b \in A$

1.3.2.2 Subeventos

Una relación muy particular entre los eventos consiste en estudiar los casos cuando todos los elementos de un evento dado están contenidos en el otro evento.

> Definición 1.3.2.2 Subeventos
> Sean los eventos A y B correspondientes a un mismo experimento, se dice que A es subevento de B si cualquier elemento que esté en A está en B. Lo anterior se simboliza,
>
> $A \subset B$. Es decir, $A \subset B$; si $a \in A$, entonces $a \in B$.

1.3.2.3 Eventos mutuamente excluyentes

Podemos generalizar que el evento vacío con cualquier otro evento es mutuamente excluyente.

> Definición 1.3.2.3 Eventos mutuamente excluyentes
> Los eventos *A* y *B*, correspondientes a un mismo experimento, se llaman **mutuamente excluyentes** si no tienen resultados comunes. Esto es: Para cualquier a ∈ A, entonces a ∉ B ;
> igualmente, para todo b ∈ B , entonces b ∉ A.

1.3.3 Operaciones fundamentales entre eventos

1.3.3.1 Unión entre eventos

La unión de los eventos *A* y *B*, correspondiente a un mismo experimento, es otro evento formado por los resultados que pertenecen al evento *A* o al evento *B* o a los dos. La unión la simbolizaremos por:
A U *B* (*A* unión *B*).

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\} \text{ la unión de los eventos } A \text{ y } B.$$

1.3.3.2 Intersección entre eventos

La intersección entre los eventos *A* y *B*, correspondientes a un mismo experimento, es otro evento formado por los elementos que pertenecen a ambos eventos. La intersección, la simbolizaremos *A* ∩ *B* (*A* intersección *B*).

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\} \text{ la intersección entre los eventos } A \text{ y } B.$$

1.3.3.3 Diferencia entre eventos

La diferencia del evento *A* menos el evento *B*, correspondientes a un mismo experimento, es otro evento formado por los elementos del evento *A*, que no pertenecen al evento *B*. La diferencia, la simbolizaremos *A* - *B* (*A* menos *B*).

$$A^c = \{x | x \in S \text{ y } x \notin A\} \text{ el evento complementario de } A.$$

1.3.3.4 Evento complementario o complemento de evento

El complemento del evento *A*, es otro evento formado por los resultados del experimento que pertenecen al espacio muestral, pero que no pertenezcan al evento *A*. El complemento del evento *A*, lo simbolizaremos, como A^c A' (complemento de *A*)

$$A^c = \{x | x \in S \text{ y } x \notin A\} \text{ el evento complementario de } A.$$

1.4 Axiomatización de la probabilidad

Dado un experimento con espacio muestral S, y una familia de eventos *A*, tal que sus elementos cumplen con las leyes del Álgebra de Eventos, llamaremos Probabilidad axiomática a la función numérica *P*, cuyo dominio es *A* y rango el intervalo $[0,1]$, y es tal que los valores *P(E)* para cualquier evento *E* en *A*, cumplen con los siguientes tres axiomas llamados axiomas de Kolmogórov, para familias finitas:

Axioma 1. Para cualquier evento *E*, de la familia *A*, $P(E) \geq 0$.

Axioma 2. Para el espacio muestral S, $P(S) = 1$.

Axioma 3. Para cualquier sucesión finita (o infinita) de eventos mutuamente excluyentes, de *A*,

E_1 E_2 E_3 ..... $E_{K,}$, se cumple

Teorema 1. Sea Ø el evento vacío, entonces P(Ø) = 0

Teorema 2. Para cualquier evento *E*, $P(E^c) = 1 - P(E)$

Teorema 3. Para cualquier evento *E*, $0 \leq P(E) \leq 1$

Teorema 4. Si A y B son eventos de un mismo espacio muestral, tales que A c B, entonces $P(A) \leq P(B)$

Teorema 5. Para dos eventos cualesquiera a y B de un mismo espacio muestral, se cumple que:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Ejemplo

Sean los eventos a y b, correspondientes a un mismo espacio muestral, tales que: $P(A^c) = 0.6$,
$P(B^c)$ y $P(A \cap B) = 0.2$, calcule $P(A \cup B)$.

Empleando el Teorema 2, tenemos
$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4$ y $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.7 = 0.3$

Finalmente, del Teorema 5 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.2 = 0.5$.

EJERCICIOS

1. ¿Cómo se le llama al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento estocástico?
2. ¿Cómo se le llama al conjunto que representa a una parte de todos los resultados posibles (pueden ser Todos los resultados o ninguno) de un experimento estocástico?
3. ¿Cuáles son los tipos de corrientes de probabilidad más comunes?

4. Si un administrador asigna probabilidades a eventos dependiendo de su experiencia para realizar una toma de decisión, él estaría empleando la corriente de probabilidad llamada.
5. Cuando la probabilidad de ocurrencia de un evento se asigna antes que se realice el experimento se le llama probabilidad de tipo...
6. ¿Cuándo dos eventos son mutuamente excluyentes?
7. Enumera las operaciones fundamentales entre eventos.
8. Sean A y B dos eventos cualesquiera de un mismo espacio muestral. ¿Cuáles incisos son correctos?

a).- $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$ **d).-** $A \cup B \subset A$ y $A \cup B \subset B$

b).- $A - B \subset A$ **e).-** $A - B \subset B$

c).- $A \subset A - B$ **f).-** $A^c \cap A = S$

9.Describa los tres axiomas de Kolmogórov, para un álgebra finita.
10. Sean A y B dos eventos cualesquiera de un mismo espacio muestral. ¿Cuáles incisos son correctos?

a).- $P(A \cap B) = P(A)$ **d).-** $P(A \cap B) \geq P(A)$

b).- $P(A \cap B) \leq P(A)$ **e).-** $P(A^c) = P(A) - 1$

c).- $P(A) = 1 - P(A^c)$

11. ¿Sí el evento E está constituido de puros elementos negativos, entonces su probabilidad tendrá que ser negativa? Justifique respuesta.
12. En el caso en que A U B = Ø, sólo puede ocurrir si A y B son....
13. A ∩ B = Ø sólo puede ocurrir si...
14. ¿En qué se basa la definición frecuentista para calcular la probabilidad de un evento?
15. ¿Cómo se considera el espacio muestral en la corriente clásica de probabilidad?
16. ¿Cómo es la asignación de probabilidades a los eventos en la corriente subjetiva?
17. ¿Por qué a la corriente bayesiana se le conoce también con el nombre de a posteriori?
18. ¿Cuáles son las dificultades por las que atraviesa la interpretación clásica, para la asignación de probabilidades a los diferentes eventos?
19. Sean A y B dos eventos cualesquiera de un mismo espacio muestral. ¿Cuál inciso es correcto?

a).- $A \cup B \subset A$ y $A \cup B \subset B$ **c).-** $A - B \subset B$

b).- $A - B \subset A$ **d).-** $A \subset A - B$

20. Sean A y B dos eventos cualesquiera de un mismo espacio muestral. ¿Cuál inciso es correcto?

a).- $P(A \cap B) = P(A)$ **c).-** $P(A \cap B) \leq P(A)$

b).- $P(A \cap B) \geq P(A)$ **d).-** $P(A^c) = P(A) - 1$

21. ¿Qué corriente de probabilidad será conveniente emplear para la asignación de un valor numérico al suceso de que Miguel Pérez se case este año?

22. ¿Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes, entonces en general P(A∩B) = P(A) - P(B) ?

2.1 TÉCNICAS DE CONTEO Y PROBABILIDAD

2.1.1 Multiplicación

Sean $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos diferentes y $n_1, n_2, \ldots, n_k$ las cantidades respectivas de elementos de dichos conjuntos, entonces la cantidad de arreglos diferentes que contienen un elemento de cada conjunto; escribiendo primero los elementos del conjunto 1, seguidos de los del conjunto 2 y así sucesivamente hasta escribir los del conjunto k, la llamaremos regla generalizada de la multiplicación está dada por:

$$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_L$$

Ejemplo

Si se tienen 8 libros de Filosofía, 4 de Historia y 7 de Matemáticas, todos ellos diferentes, ¿cuántos arreglos de 3 libros, que contengan un libro de cada tema, se pueden formar con todos los libros anteriores?, si primero van los libros de Filosofía, seguidos por los de Historia y finalmente los de Matemáticas.

Como se puede escoger de 8 maneras un libro de Filosofía, de 4 maneras uno de Historia y de 7 maneras el de Matemáticas, la regla de la multiplicación, nos indica que el total de arreglos que consten de tres libros diferentes (uno de cada tema), será $8 \times 4 \times 7 = 224$.

2.1.1.1 Arreglos con repetición (reemplazo)

Diremos que los arreglos son con repetición o reemplazo, cuando después de elegido un elemento puede volverse a seleccionar (cada vez que se realice una nueva extracción). Es decir, si tenemos un conjunto *A* con n elementos diferentes y realizamos una extracción, esto se podrá hacer de *n* formas diferentes. Si nos condicionamos a colocar el elemento elegido en el conjunto (reemplazarlo), al realizar una segunda extracción la podremos realizar otra vez de n formas, y así sucesivamente k veces, resultando

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{k \text{ veces}} = n^k \text{ arreglos diferentes.}$$

> Definición 2.1.1.1 Arreglos con repetición
>
> Sea el conjunto A = $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ con *n* elementos diferentes, la cantidad de arreglos que contengan k elementos elegidos con reemplazo del conjunto A estará dada por: n^k

Ejemplo

¿Cuántos números diferentes de placas se pueden formar con los números dígitos y las letras del alfabeto, si cada número de placa consta de 3 letras y 3 dígitos? Supóngase que se permite la repetición.
Cada letra del arreglo se puede escoger de 26 maneras, ya que se permite la repetición. Igualmente, cada dígito del arreglo se puede escoger de 10 maneras; por lo tanto, existen

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^3 \times 10^3 \text{ números de placas diferentes.}$$

2.1.1.2 Arreglos sin repetición (permutaciones)

Diremos que los arreglos son sin repetición o sin reemplazo, cuando después de elegido un elemento ya no puede volver a ser seleccionado. Es decir, si tenemos un conjunto A= $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con n elementos diferentes y realizamos una primera extracción, esto se podrá hacer de n formas diferentes.

Sea el elemento elegido a_3, éste ya no se regresa al conjunto teniendo un conjunto $A_2 = \{a_1, a_2, a_4, a_5, \ldots, a_{n-1}\}$ con n-1 elementos diferentes, de tal forma que cuando se efectúe una segunda extracción la podremos realizar sólo de n -1 formas, y así sucesivamente hasta el k ésimo conjunto el cual contendrá $(n - (k - 1))$ elementos diferentes para elegir uno y por la regla de la multiplicación la cantidad de arreglos diferentes que se puedan formar con los k conjuntos estará dada

$$\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-(k-1))}_{k \text{ elementos}} \text{ arreglos diferentes.}$$

> Definición 2.1.1.2 Arreglos sin repetición
>
> Sea el conjunto A = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ con *n* elementos diferentes, la cantidad de arreglos ordenados que contengan k elementos elegidos sin reemplazo del conjunto A estará dada por el número resultante de:
>
> $$n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times (n - (k - 1))$$

Ejemplo

¿Cuántos números diferentes de placas se pueden formar con los números dígitos y las letras del alfabeto, si cada número de placa consta de 3 letras y 3 dígitos? Supóngase que no se permite la repetición.

La primer letra se puede elegir de 26 maneras, la segunda de las 25 restantes y la tercer letra de las 24 sobrantes, en el caso de los números dígitos se escogerán, el primero de 10 maneras, el segundo de 9 y el tercero de 8, finalmente por la definición 2.1.1.2 y la regla de la multiplicación se tiene que la cantidad de arreglos es: $(26 \times 25 \times 24) \times (10 \times 9 \times 8) = 11232000$.

2.1.2 Factorial de un número

> Definición 2.1.2 Factorial
>
> El factorial de un número $n \in N$ se define como el producto sucesivo $1 \times 2 \times \ldots \times n$ y se simboliza por n!.
>
> Nota 0! =1

2.1.3 Permutaciones

Definición 2.1.3 Permutaciones
Llamaremos Permutación de k elementos escogidos de un total n (todos diferentes) a:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad 0 \le k \le n.$$

La cual representa la cantidad total de arreglos ordenados de tamaño k, que se pueden formar con n elementos diferentes cuando no se permite la repetición.

2.1.3.1 Permutaciones con elementos iguales

En los casos en que se quiere formar arreglos con todos los elementos de un conjunto entre los cuales existen algunos que son iguales, tenemos lo siguiente.
De forma general cuando se tienen n_1 elementos iguales, n_2 elementos iguales, …… y n_m elementos iguales, tales que: $n_1 + n_2 + \ldots n_m = n$, resultará la cantidad total de ordenamientos diferentes, considerando todos los n elementos por ordenamiento:

$$P_{n_1 n_2 \ldots n_m}^n = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} \text{ ; con } n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$$

Ejemplo

Se tiene 4 computadoras “Acer” de aspecto semejante, 3 computadoras “Dell” también de aspecto semejante y 3 computadoras “HP” igualmente de aspecto semejante, ¿en cuántas maneras diferentes se pueden ordenar en línea recta todas las computadoras?
Como se tiene en total 10 computadoras, de las cuales existen 4, 3 y 3 de aspecto semejante, de la expresión 1, se tendrá:

$$\frac{10!}{4!3!3!} = 4200 \text{ total de arreglos diferentes.}$$

¿Cuántas permutaciones diferentes, se pueden formar con todas las letras de la palabra Guanajuato?
El problema es del caso en el que existen elementos iguales, se tienen 3 “a”, 2 “u” y una letra “g”, “n”, “j”, “t” y “o”. Empleando la expresión de permutaciones con elementos iguales, tendremos que el total de arreglos es:

$$\frac{10!}{3!2!1!1!1!1!1!} = 302400 \text{ permutaciones diferentes}$$

2.1.4 Combinaciones

Una diferencia fundamental entre las permutaciones y las combinaciones consiste en que el orden de los elementos de los grupos escogidos en estas últimas no importa, sólo se considera su cantidad de elementos en el grupo, mientras que en las permutaciones el orden entre sus elementos es fundamental.

Permutaciones ab ≠ ba.

Combinaciones $\{a, b\} = \{b, a\}$

En muchas literaturas para la notación de combinatoria, también suele usarse alguna de las siguientes: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ y ${}_nC_k$, esta última se emplea en las calculadoras, junto con la de ${}_nP_k$ para las permutaciones
.

> **Definición 2.1.4 Combinaciones**
> Dado un conjunto con n elementos diferentes, llamaremos combinación a cualquier subconjunto no ordenado de tamaño k. Denotaremos al número de combinaciones de tamaño k que se pueden formar con los n elementos por:
>
> $C_k^n, \ 0 \le k \le n$. En donde $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$

Ejemplo

¿Cuántos grupos de 2 elementos se puede formar de un conjunto que contiene 5 elementos?.
Como en estos casos no importa el orden entre los elementos de los arreglos de la expresión anterior de combinaciones, tendremos que

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

es el total de grupos diferentes que consten de dos elementos cada uno. Por ejemplo, si el conjunto es $\{$a, b, c, d, e$\}$, los grupos de 2 elementos son:

$$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\}.$$

2.1.5 Reglas de la suma

La aplicación de la regla de la suma por lo general se realiza cuando aparecen en el enunciado del problema las frases: “a lo más”, “al menos”, “por lo menos”, “menos que”, etc.

Definición 2.1.5 Reglas de la suma
Sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$ diferentes tipos de arreglos que pueden ocurrir de las siguientes formas $n_1, n_2, \ldots, n_m$ respectivamente, entonces el total de arreglos de todos los m tipos ocurrirán de:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m$$

formas y se le llamará regla de la suma.

Ejemplo

Se va a seleccionar un comité de 5 personas a partir de un grupo de 20, de los cuales 3 son hermanos ¿de cuántas maneras se puede formar el comité, si por lo menos dos de los hermanos estarán en el comité?
Como en el problema se pide que al menos dos de los tres hermanos estén en el comité, se tiene que existen dos tipos de arreglos.
Un tipo de estos arreglos, será cuando se tengan dos hermanos en el comité, lo que podrá ocurrir de la siguiente manera (notar que el orden en este problema no es importante, ya que sólo interesa que en el comité existan 5 personas). Puesto que se requieren cinco personas en el comité y dos de ellas deben de elegirse de los tres hermanos, tenemos por la regla de la multiplicación, que esto podrá ocurrir de:

$$C_2^3 \times C_3^{17} \text{ maneras,}$$

donde la primera parte representa la cantidad de maneras de escoger tres de los tres hermanos, mientras que la segunda parte representa la cantidad de maneras de escoger a las otras dos personas de los 17 restantes.
Finalmente, por la regla de la suma, tenemos que el total de maneras en que pueden ocurrir los dos tipos de arreglos es:

$$C_2^3 \times C_3^{17} + C_3^3 \times C_2^{17} = 3 \times 680 + 1 \times 136 = 2176.$$

Ejemplo

Una prueba de falso y verdadero está formada de 14 preguntas de las cuales 8 son verdaderas y las demás falsas ¿cuántos arreglos de 14 respuestas se pueden dar, si se contestan todas las preguntas?
Observemos que el problema se refiere a los casos en que existen elementos iguales (ya que si dos o más respuestas son verdaderas no se distingue entre ellas). Por lo tanto, de la fórmula de permutaciones con elementos iguales, tendremos que la cantidad de arreglos posibles está dada por:

$$P_{8,6}^{14} = \frac{14!}{8!6!} = 3003 \text{ maneras de contestar el examen}$$

2.1.6 Aplicación de las técnicas de conteo a la probabilidad

Sólo se considerarán espacios muestrales finitos; por lo tanto, simbolizamos por ŋ(S) ≠ 0, a la cantidad de elementos del espacio muestral y por ŋ(E) la cantidad de elementos de algún evento E.
Al considerar que los elementos del espacio muestral son equiprobables, la probabilidad de uno cualesquiera de ellos es:
$\frac{1}{ŋ(S)}$ y, por la definición clásica de probabilidad tendremos la probabilidad del evento igual a:

$$P(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(S)}, \text{ con } \eta(S) \neq 0 \text{ y } E \subset S.$$

En los ejemplos siguientes el procedimiento de solución consiste en lo siguiente:

- Primero. Definimos al experimento del que se habla en el problema.
- Segundo. Se encuentra el espacio muestral del experimento.
- Tercero. Se define y encuentra al evento correspondiente.

Finalmente se aplica la definición clásica de probabilidad.

Ejemplo

Una urna contiene 13 bolas numeradas del 1 al 13, de las cuales 3 son rojas, 4 blancas y 6 azules; todas idénticas en forma y tamaño. Se selecciona al azar 2 bolas de la urna. Calcule la probabilidad de que exactamente una de ellas sea roja, si se extraen

a) una tras otra sin reemplazo.
El experimento consiste en: “La extracción de dos de las 13 bolas, una tras otra sin reemplazo”.
Por lo tanto, el espacio muestral S tendrá ŋ(S) =13 x 12 =156 elementos.
Por otro lado, el evento E se define como: “Los resultados del experimento en los que una, y sólo una, de las dos bolas es roja”.

Lo anterior puede ocurrir en dos casos: Primero cuando la primera bola extraída es roja y la segunda no lo es 3 x 10 = 30 opciones; y el segundo caso cuando la primera no es roja y la segunda sí lo es 10 x 3 = 30 opciones.
Por lo tanto, ŋ(E) = 30 + 30 = 60, y la probabilidad será:

$$P(E) = \frac{\eta(E)}{\eta(S)} = \frac{60}{156} = 0.3846.$$

b) Las dos a la vez.

El experimento consiste en: “La extracción de dos, de las 13 bolas a la vez”.
Por lo tanto, el espacio muestra S tendrá ŋ(S) = C_2^{13} = 78 elementos.

Por otro lado, el evento *E* se definirá como: “Los resultados del experimento en los que una, y sólo una de las dos bolas es roja”. Lo anterior ocurre de ŋ(E) = C_2^{13} x C_1^{10}= 30 maneras y la probabilidad es:

$$P(E)=\frac{\eta(E)}{\eta(S)}=\frac{60}{156}=0.3846.$$

c) El experimento consiste en: “La extracción de dos de las 13 bolas una tras otra, con reemplazo”.
Por lo tanto, el espacio muestral S tendrá | (S) =13 x 13 =169 elementos.
Por otro lado, el evento E se define así: “Los resultados del experimento en los que una, y sólo una, de las dos bolas es roja”.
Lo anterior puede ocurrir, en dos casos: el primero ocurre cuando la primer bola extraída es roja y la segunda no lo es, 3 x 10 = 30 opciones, y el segundo caso es cuando la primera no es roja y la segunda sí es roja, 10 x 3 = 30 opciones. Por lo tanto, ŋ(E) = 30 + 30 = 60 , y la probabilidad será:

$$P(E)=\frac{\eta(E)}{\eta(S)}=\frac{60}{169}= 0.3550$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el nombre que se le da a los arreglos en donde el orden entre sus elementos no es de importancia?
2. ¿Qué diferencia existe entre arreglos con elementos iguales y arreglos con repetición?
3. ¿Qué relación existe entre una permutación sin repetición y una combinación?
4. ¿En qué consiste la principal diferencia entre una permutación y una combinación?
5. El administrador de una red de 3 salas tiene en su poder 20 películas diferentes con clasificaciones A (6 películas), B (4 películas) y C (10 películas), para proyectar en los siguientes 10 días. Si por políticas de la administración en un periodo de 10 días se proyectan 2 películas diferentes en cada sala, y el administrador hace la programación al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la asignación de las dos películas en la sala uno sean del tipo A, la asignación de las dos películas en la sala 2 sean del tipo B y finalmente las dos películas en la sala 3 sean del tipo C?
6. Considere todas las letras de la palabra “Administración”. Calcule la cantidad de arreglos diferentes que se pueden formar considerando todas las letras al mismo tiempo.
7. Una persona, que no sabe leer absolutamente nada, acomoda en línea recta en un estante de una tienda de libros de viejos, en la calle Donceles, 6 libros de Filosofía, 4 de Química y 8 libros de Historia (todos ellos diferentes). ¿En cuántas formas se pueden acomodar los libros si los de Filosofía deben de ir juntos?
8. Se dispone de un grupo de doce problemas, para realizar de tarea.

a) ¿De cuántas maneras diferentes se puede asignar la tarea si consta de cinco problemas?
b) Si se tiene 2 problemas más difícil que los demás, ¿cuántas veces se incluirán los 2 problemas más difíciles en la tarea?

9. Un experimento consiste en lanzar dos dados, utilice los teoremas combinatorios para determinar el número de puntos muestrales y asigne probabilidades a los puntos muestrales y encuentre la probabilidad de que la suma de los números que aparecen en los dados sea igual a 9.

10. Para presentar un examen de Física, el profesor les da a sus alumnos de antemano 60 preguntas diferentes; las cuales el día del examen colocará en una urna y el estudiante deberá elegir aleatoriamente 3 preguntas, sin reemplazo. Supóngase que el primer estudiante que va a elegir sólo se preparó en 50 de las preguntas (las cuales puede contestar sin equivocación), mientras que de las otras 10 no sabe absolutamente nada (si le toca una de ellas la dejaría en blanco). El estudiante aprobará el examen si contesta bien al menos dos de las tres preguntas. Calcule la probabilidad de que en dichas condiciones el estudiante apruebe el examen.

11. En un componente electrónico existen 20 placas de tres tipos diferentes (8 del tipo I, 5 del tipo II y 7 del tipo III). Se seleccionan al azar 5 placas para inspeccionarlas. Encuentre la probabilidad de:

a) Que las 5 placas sean del mismo tipo.

b) Que dos sean del tipo I; una del tipo II y 2 del tipo III.

12.Un productor tiene almacenados nueve motores diferentes; dos de los cuales fueron suministrados por un proveedor en particular. Se deben de distribuir los motores en tres líneas de producción, con tres motores en cada línea. Si la asignación de los motores es aleatoria, encuentre la probabilidad de que los dos motores del proveedor queden en una misma línea.

13. En un centro comercial quedan 10 carros de control remoto para la venta, entre los cuales existen 4 Defectuosos. Si el señor Jaime López entra a la tienda para comprar dos de tales carros para sus hijos, Juan y Carlos. Calcule la probabilidad de que al menos uno de los carros elegidos sea defectuoso.

14. En una tienda se tienen 40 refrigeradores de los cuales 35 son buenos y 5 defectuosos. Encuentre la probabilidad de que en los siguientes 4 pedidos que se vendan, se encuentren dos defectuosos.

15. Un juego consiste en elegir 6 números sin repetición de 47 posibles (Melate). La persona que haya elegido con anterioridad al sorteo los 6 números resultantes correctos, ganará el juego. Calcule la probabilidad de que 3 de los 6 números elegidos por una persona coincida con los 6 números resultantes del sorteo.

16.El alumno Armando González se ha preparado en 25 temas, de un total de 35, para un examen, en el cual se les entregará una ficha con 5 temas al azar de la lista de 35. Si el alumno deberá contestar correctamente al menos 3 temas de los 5 para pasar, calcule la probabilidad de que Armando González apruebe el examen.

17. ¿Cuál es la probabilidad de que el portero de un cine sé niegue dejar entrar a 2 menores de edad (ya que se exhibe una película sólo para adultos), al revisar las identificaciones de 4 personas de entre un grupo de 8, de los cuales tres no son mayores de edad?

18. Considere todas las letras de la palabra “Estadística”. Calcule la cantidad de arreglos diferentes que se pueden formar considerando todas las letras al mismo tiempo (ignorando la acentuación).

19. Un examen de Álgebra Lineal en la UPIICSA está formado por tres temas. El tema A contiene 6 preguntas, el tema B, 4 preguntas y el tema C, 8 preguntas. Se debe contestar 5 preguntas. ¿De cuántas maneras diferentes puede elegir sus preguntas un estudiante, si a lo más debe de elegir 2 preguntas del tema C?

20. En un grupo de 30 personas se tiene 4 con apellido Gómez. Si se elige un equipo de 3 personas representante del grupo. ¿De cuántas formas diferentes se puede realizar la elección de tal manera que al menos una de las personas elegidas tenga el apellido Gómez?

21. En una tienda se tiene 30 artículos de los cuales 20 son buenos y 10 defectuosos. Se seleccionan 8 artículos, ¿de cuántas maneras se llevará a cabo la elección de tal forma que a lo más 2 sean defectuosos?

3.1 PROBABILIDAD CONDICIONAL

> Definición 3.1 Probabilidad condicional
> Dados dos eventos A y B llamaremos probabilidad condicional del evento A dado que sucedió B a:
>
> $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ con } P(B) > 0$$

Ejemplo

1. Dados los eventos A y B (dentro de un mismo espacio muestral S), tales que P(A) = 0.6, P(B) = 0.4 y P(A ∩ B) = 0.1. Calcule la P(A | B) .

De la formula de permutaciones con elementos iguales tenemos que

$$P(A \mid B) = \frac{0.1}{0.4} = 0.25 .$$

2. Supóngase que en un lote de 50 automóviles VW se repartirán aleatoriamente 20 para el mercado interno y 30 para el de exportación. Diez de los automóviles de exportación son de color blanco, y los otros 20 de color azul. Mientras que la mitad de los automóviles del mercado interno son de color blanco y la otra mitad azul. Si el gerente elige aleatoriamente un automóvil de color blanco ¿cuál es la probabilidad de que dicho automóvil sea de exportación?

Este tipo de problemas se resuelve fácilmente empleando una tabla para representar los datos.

	Blanco, B	Azul, A	Totales
Mercado interno, I	10	10	20
Mercado externo, E	10	20	30
Totales	**20**	**30**	**50**

Puesto que nos restringimos a la elección de un automóvil blanco la probabilidad de que el automóvil elegido sea de exportación es de tipo condicional.

Representemos por *I*, los automóviles del mercado interno, por *E* los del externo, por *B* los de color blanco, y finalmente por *A* los de color azul. Notamos que el espacio muestral en este caso consta de 50 elementos.
Por tanto:
La probabilidad de elegir un automóvil blanco es:

$$P(B) = \frac{\eta(B)}{\eta(S)} = \frac{20}{50} = 0.40$$

Mientras que la probabilidad de elegir un automóvil blanco y de exportación es

$$P(E \cap B) = \frac{\eta(E \cap B)}{\eta(S)} = \frac{10}{50} = 0.20\,.$$

Luego $P(E \mid B) = \dfrac{P(E \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.20}{0.40} = 0.5\,.$

3.1.1 Regla de la multiplicación de la multiplicación de probabilidades

Al calcular la probabilidad de la intersección de dos eventos A y B cuando conocemos la probabilidad de uno de ellos y la probabilidad del otro condicionado al primero se puede emplear la fórmula 1, para realizar el cálculo, por medio de una regla a la que llamaremos "Regla de la multiplicación de Probabilidades".

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B)$$

también de forma equivalente a partir de P (B | A), se obtiene:

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(B \mid A)$$

A las fórmulas anteriores, se les conoce como "Regla de la multiplicación de probabilidades".

Ejemplo

En una urna se tienen 13 bolas numeradas del 1 al 13 de las cuales 5 son rojas y 8 blancas todas idénticas en forma y tamaño. Se seleccionan al azar 2 bolas una tras otra sin reemplazo. Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean blancas.

Primero simbolicemos por

A: "La primer bola extraída es blanca"
B: "La segunda bola extraída es blanca".

Como originalmente en la urna existen 13 bolas, de las cuales 8 son blancas, tenemos $P(A) = 8/13$
Cuando calculamos la probabilidad del evento B nos restringimos a la extracción de una bola blanca quedando en la urna 12 bolas de las cuales 7 son blancas. Se tiene entonces que la probabilidad de extraer una segunda bola blanca es $P(B \mid A) = 7/12$.

Finalmente, con las probabilidades calculadas, y empleando la expresión 3, se obtiene:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = \frac{8}{13} \times \frac{7}{12} = \frac{56}{156} = 0.3590\,.$$

La regla de la multiplicación para tres eventos

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap (B \cap C)) = P(B \cap C)P(A \mid B \cap C) =$$
$$= P(C)P(B \mid C)P(A \mid B \cap C)$$

En su forma general la regla de multiplicación de Probabilidades para n eventos estará dada por la expresión:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

3.1.2 Empleo de los diagramas de árbol en la probabilidad condicional

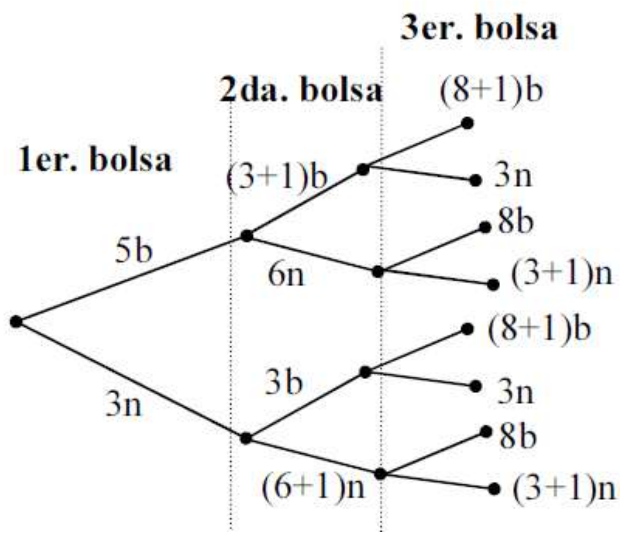
En la teoría de las probabilidades siempre debe cumplirse que la suma de todas las probabilidades de los diferentes caminos de cualquier vértice sea igual a 1.
La probabilidad de una rama cualquiera se obtiene multiplicando las probabilidades de los caminos descendentes, esto se hace a partir del vértice de la última arista y hasta llegar al vértice inicial.
Es importante hacer notar que las probabilidades de los caminos ascendentes son probabilidades condicionales; puesto que están restringidas a que sucedan los eventos de las aristas por las que está dirigido el camino

Definición 3.1.2 Diagramas de árbol
El árbol lo comenzaremos trazando desde un punto que llamaremos vértice las diferentes ramas, llamadas caminos o aristas; cada una de ellas llega a otro vértice y de igual forma desde ese punto pueden trazarse otras aristas y así sucesivamente hasta terminar con todos los caminos posibles.

Ejemplo

Una bolsa contiene 5 pelotas blancas y 3 negras, una segunda bolsa contiene 3 blancas y 6 negras, finalmente una tercer bolsa contiene 8 pelotas blancas y 3 negras, todas las pelotas son de igual forma y tamaño. Se saca una pelota aleatoriamente de la primer bolsa y se coloca sin verla en la segunda, posteriormente de ésta se saca una pelota y se coloca en la tercera. ¿Cuál es la probabilidad de que una pelota que se saque bajo estas condiciones de la tercer bolsa sea negra? Resuelva por diagramas de árbol, pero escriba en forma simbólica las probabilidades encontradas.

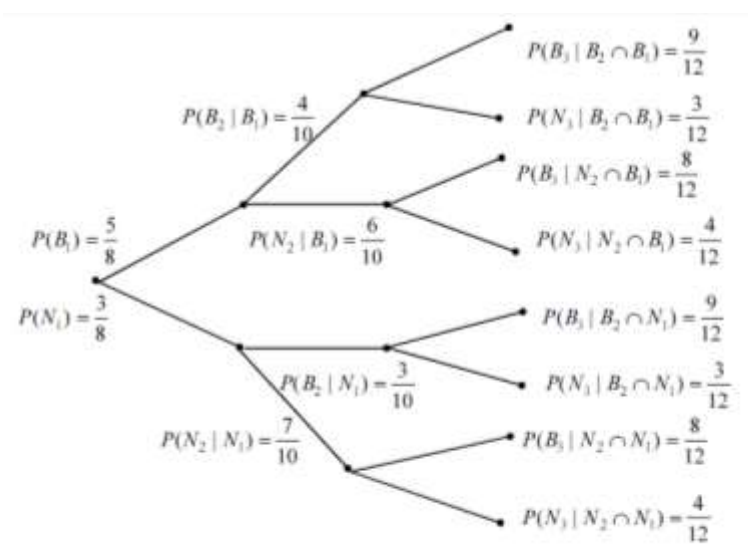
Primero vamos a hacer un diagrama que nos represente las diferentes acciones que pueden ocurrir al sacar e introducir pelotas de una urna a otra. Posteriormente comenzamos con la asignación de probabilidades a las diferentes ramificaciones del diagrama de árbol ya elaborado. Ver figura siguiente.



Explicación:
Si sacamos una pelota blanca de la primer bolsa y se coloca en la segunda tendremos, en ésta, 3 +1 = 4 pelotas blancas y 6 negras.
En caso de que la pelota de la primer bolsa sea negra en la segunda bolsa tendremos 3 blancas y 6 +1 = 7 negras.
Finalmente, si de la segunda bolsa se extrae una pelota blanca al colocarla en la tercer bolsa tendremos 8 +1 = 9 blancas y 3 negras, en caso contrario serán 3 +1 = 4 negras y 8 blancas.

Simbolizando por B_k al evento. “La pelota extraída de la bolsa k es blanca”.
De igual forma por $_k$N al evento: “La pelota extraída de la bolsa k es negra”.

En el siguiente diagrama mostraremos las probabilidades correspondientes:



Según el diagrama anterior resultan las siguientes probabilidades:

Para la bolsa 1: $P(B_1) = \frac{5}{8}$ y $P(N_1) = \frac{3}{8}$.

Después de ocurrida la extracción de la bolsa 1, tenemos las probabilidades condicionales para la bolsa 2:

En el caso de la primera ramificación en la primera bolsa:

$$P(B_2 \mid B_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \text{o} \quad P(N_2 \mid B_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Para el caso de la segunda ramificación en la primera bolsa:

$$P(B_2 \mid N_1) = \frac{3}{10} \quad \text{o} \quad P(N_2 \mid N_1) = \frac{7}{10}.$$

Finalmente, después de ocurridas las extracciones de las bolsas 1 y 2, tenemos las probabilidades condicionales para la bolsa 3:
En el caso de la primera ramificación en la segunda bolsa:

$$P(B_3 \mid B_2 \cap B_1) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{o} \quad P(N_3 \mid B_2 \cap B_1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

En el caso de la segunda ramificación en la segunda bolsa:

$$P(B_3 \mid N_2 \cap B_1) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \text{o} \quad P(N_3 \mid N_2 \cap B_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

En el caso de la tercer ramificación en la segunda bolsa:

$$P(B_3 \mid B_2 \cap N_1) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{o} \quad P(N_3 \mid B_2 \cap N_1) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

En el caso de la cuarta ramificación en la segunda bolsa:

$$P(B_3 \mid N_2 \cap N_1) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \text{o} \quad P(N_3 \mid N_2 \cap N_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

De los resultados anteriores fácilmente se calculan las probabilidades de que la bola extraída de la tercera urna sea negra. Para tal efecto tenemos 4 casos, tal y como se muestra a continuación:

$$P(N_3 \mid B_1 \cap B_2)P(B_2 \mid B_1)P(B_1) = \frac{3}{12} \times \frac{4}{10} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{16}.$$

$$P(N_3 \mid B_1 \cap N_2)P(N_2 \mid B_1)P(B_1) = \frac{4}{12} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{8}.$$

$$P(N_3 \mid N_1 \cap B_2)P(B_2 \mid N_1)P(N_1) = \frac{3}{12} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{320}.$$

$$P(N_3 \mid N_1 \cap N_2)P(N_2 \mid N_1)P(N_1) = \frac{4}{12} \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{8} = \frac{7}{80}.$$

Finalmente, por el principio de la suma resultará

$$P(N_3) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{9}{320} + \frac{7}{80} = \frac{97}{320} = 0.303125.$$

3.2 Eventos independientes

Definición 3.2 Eventos independientes Dos eventos A y B son independientes, si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Del ejemplo anterior podemos concluir que los ejercicios en donde se realicen elecciones, las condiciones con o sin reemplazo influyen en los eventos para que sean independientes o dependientes.

Con reemplazo $\Rightarrow$ independencia

Sin reemplazo $\Rightarrow$ dependencia

Teorema. Si S es un espacio muestral, A y B eventos independientes en S, entonces las parejas siguientes, también son independientes A y B^c; A^c y B ; A^c y B^c.

Ejemplo

En una urna se tienen 13 bolas numeradas del 1 al 13 de las cuales 5 bolas son rojas y 8 blancas, todas idénticas en forma y tamaño. Se seleccionan al azar 2 bolas de la urna, una tras otra con reemplazo. Calcule la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean blancas.

Primero simbolicemos por
A: “La primer bola extraída es blanca”
B: “La segunda bola extraída es blanca”

Como originalmente en la urna existen 13 bolas, de las cuales 8 son blancas. Considerando que el experimento consiste en extraer dos bolas una tras otra con reemplazo, tenemos que el espacio muestral S tiene ŋ (S) = 13x13 =169 elementos.

Por otro lado, el evento A ∩ B : “Ambas bolas blancas”, tiene ŋ (A ∩ B) = 8 x 8 = 64 elementos, y por tanto,

$$P(A\cap B)=\frac{\eta(A\cap B)}{\eta(S)}=\frac{64}{169}.$$

Vamos a calcular las probabilidades de A y de B y comprobaremos que estos eventos son independientes.

Para el evento A tenemos 13 bolas de las cuales 8 son blancas; por lo tanto: P(A) =8/13

Fácilmente se comprueba que los eventos son independientes puesto que:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{8}{13}\times\frac{8}{13}=\frac{64}{169}.$$

3.3 Teorema de Bayes

Veamos ahora como se resolverían ciertos problemas en donde se conoce el espacio muestral y una partición de éste. Además de que se tiene conocimientos con respecto a las probabilidades de los eventos de la partición y se quiera calcular la probabilidad de algún otro evento del espacio muestral.

Pero antes de continuar recordemos el concepto de partición de un espacio muestral. Pues bien sea S un espacio muestral, se dice que los eventos E_1 E_2 …. E_n forman una partición de S, si cumplen con lo siguiente:

a) $P(E_k)\neq 0$, para toda $k=1,2,\ldots,n$.

b) $S=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$.

c) Para cualesquier par de eventos E_i y E_j, con $i\neq j$, de la partición se cumple $E_i\cap E_j=\varnothing$.

Ejemplo

1. Sea el experimento “Lanzamiento de dos monedas”, y anotemos las combinaciones de resultados posibles, S = $\{$ss, sa, as, aa,$\}$ (denotando sol por s y águila con a).

Los siguientes eventos forman una partición de S.

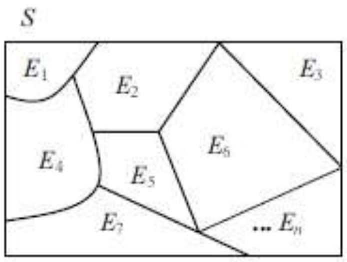
E_1 :“Resulte una sola águila”, E = $\{$sa. as$\}$

E_2 = “Resulten dos águilas”, E_2 = $\{$aa$\}$.

E_3 = “Ningún águila”, E_3 = $\{$ss$\}$.

2.- Un espacio muestral S siempre tiene una partición formada con un evento E, tal que $0 < P(E) < 1$, y su complemento.
Este tipo de partición se emplea con mucha frecuencia en los problemas de probabilidad. Dichos eventos sí forman una partición de S; puesto que cumplen con las tres condiciones de una partición.

Gráficamente una partición del espacio muestral se observa de la siguiente forma:



Muestra la partición de un espacio muestral.

Teorema de la probabilidad total. Si S es un espacio muestral, A un evento en S y E_n, E_2 ,... , E_n una partición de S, entonces
$P(A) = P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) + \ldots + P(A|E_n)P(E_n)$.

3. Un preso que se fugo es buscado por la policía, la cual está segura que el prófugo sólo puede seguir uno de 5 caminos posibles C_1 , C_2 , C_3 , C_4 y C_5 , los cuales puede elegir con las probabilidades, 0.20, 0.30, 0.10, 0.25 y 0.15, respectivamente. Por las condiciones policíacas de cada una de las ciudades a las que puede llegar las probabilidades, respectivamente, de que pueda ser atrapado, son; 0.20, 0.10, 0.40, 0.30 y 0.40. Calcule la probabilidad de que sea capturado.

De las condiciones del problema podemos deducir las probabilidades:
$P(C_1) = 0.20$, $P(C_2) = 0.30$, $P(C_3) = 0.10$, $P(C_4) = 0.25$ y $P(C_5) = 0.15$

Como podemos notar tendremos tantas ciudades como caminos, por lo tanto, numeraremos a las ciudades con respecto al camino elegido.

Simbolizando por A el evento '' El fugitivo es atrapado '', tendremos que para ser atrapado en la ciudad *k,* con *k*=1,2,3,4,5 primero debe huir por el camino *k*. Se tienen entonces las probabilidades condicionales:

$P(A|C1) = 0.20$, $P(A|C2) = 0.10$, $P(A|C3) = 0.4$, $P(A|C4) = 0.3$ $P(A|C5) = 0.4$, finalmente por el Teorema de Probabilidad Total resulta:

Teorema 3.3 Teorema de Bayes
Si S es un espacio muestral A en un evento en S y $E_1, E_2, \ldots, E_n$ una partición de S, entonces para cualquier evento k de la partición tendremos que:

$$P(E_k|A) = \frac{P(A|E_k)\,P(E_k)}{P(A|E_k)\,P(E_1) + P(A|E_2)\,P(E_2) + \cdots + P(A|E_n)\,P(E_n)}$$

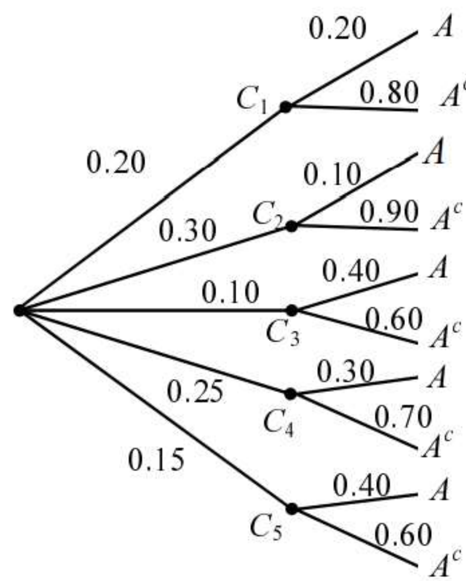
$$P\ (A) = \ P\ (\text{A}|\text{C1}) + P\ (\text{A}|\text{C2}) + \cdots + P\ (\text{A}|\text{C5})$$

$$P\ (A) = (0.20 \times 0.20) + (0.10 \times 0.3) + (0.4 \times 0.1) + (0.30 \times 0.25) + (0.4 \times 0.15)$$

$$P(A) = 0.245$$

EJEMPLOS 3.7

1. Del ejemplo anterior, si el fugitivo fue atrapado, ¿Cuál es la probabilidad de que la detención se efectuara en la ciudad número 2?
   Empleando la simbología anterior y el Teorema de Bayes tendremos:
   $$P\ (C_2|\text{A}) = \frac{0.1 \times 0.3}{0.245} = 0.122$$
2. Trace el diagrama de árbol del ejercicio anterior
   Explicación del diagrama de árbol: El vértice inicial tiene 5 caminos. Se escriben en cada uno de ellos sus probabilidades de ser elegido, si observamos con detenimiento podemos notar que la suma de todos es 1. A su vez, en cada camino, se trazan otros dos caminos secundarios, uno corresponde al evento A, y el otro a su complemento, la suma de las probabilidades sigue siendo uno.
   Deducimos que las segundas posibilidades son condicionales, puesto que se restringen a la ocurrencia de escoger un camino principal. Las probabilidades son:
   $P\ (\text{A}|\text{C1}) = 0.20,\ \ P\ (\text{A}|\text{C2}) = 0.10\ \ , P\ (\text{A}|\text{C3}) = 0.4,\ \ P\ (\text{A}|\text{C4}) = 0.3\ P\ (\text{A}|\text{C5}) = 0.4$
   Y sus complementos respectivos son:
   $P\ (A^C|\text{C1}) = 0.80,\quad P\ (A^C|\text{C2}) = 0.90\quad , P\ (A^C|\text{C3}) = 0.6,$
   $P\ (A^C|\text{C4}) = 0.7\ P\ (A^C|\text{C5}) = 0.6$



Las probabilidades en la primera ramificación son las siguientes:

$P(C1) = 0.20, P(C2) = 0.30, P(C3) = 0.10, P(C4) = 0.25, P(C5) = 0.15$

Los datos del diagrama de árbol representan otra alternativa para calcular las posibilidades requeridas.

PREGUNTAS

1. ¿Cómo se llama la corriente de probabilidad para los cálculos en eventos dependientes?
2. Si A y B son eventos dependientes y A está condicionado a B, su probabilidad se representaría por $P\ (\text{A}|\text{B})$. ¿Cómo se representaría la probabilidad del evento del complemento anterior?
3. ¿Basado en que concepto se obtiene la regla de multiplicación de probabilidades?
4. Simboliza la regla de multiplicación para tres eventos.
5. En un diagrama de árbol de probabilidades, ¿cómo son en sus caminos ascendentes?
6. ¿Si dos eventos cualesquiera son mutuamente excluyentes, son también independientes?
7. ¿Si dos eventos cuales quiera son independientes, son también mutuamente excluyentes?
8. ¿Cuál es la relación existente entre la independencia de eventos y la extracción con reemplazo en un evento aleatorio?
9. ¿Podrán dos eventos A y B ser diferentes e independientes y tener el mismo valor de probabilidad?
10. ¿En qué tipo de eventos puede aplicarse el teorema de la probabilidad total?
11. Explique con sus propias palabras el Teorema de Bayes.

12. Entendiendo por probabilidades complementarias aquellas cuya suma sea uno, y considerando $0 < P(B) < 1$. Son las probabilidades $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ y $(\mathrm{A}|B^c)$ complementarias?
13. Cuando tenemos un conjunto finito de eventos independientes cuya unión es el espacio muestral. ¿Podemos aplicar el Teorema de Bayes y de la probabilidad total?

EJERCICIOS

1. Una empresa tiene dos repartidores y quiere tomar una decisión para quedarse solo con uno de ellos, se quedará quien tenga la mayor probabilidad de atender en 3 pedidos a tiempo. El Repartidor 1 (R1) tiene una probabilidad de atención puntual de 0.95 para el primer pedido, de no llegar a tiempo, la probabilidad de hacerlo en el segundo pedido es de 0,75. Mientras que el Repartidor 2 (R2) tiene una probabilidad de llevar a tiempo el primer pedido de 0.9, de no hacerlo, la probabilidad de que llegue a tiempo al segundo es de 0.8. ¿En estas condiciones, despedirán a R1 o R2 de la empresa?
2. Entre cierto conjunto de población, las enfermedades 1 y 2 son bastante comunes. Un 30% contraerá la enfermedad 1 en algún momento de su vida, asimismo, 20% contraerá la enfermedad 2, y el 3% contraerá ambas. Calcule la posibilidad de que una persona escogida al azar de esta población contraiga ambas enfermedades.
3. Un sistema detector de humo utiliza los dispositivos independientes A y B. Las probabilidades de A y B de detectarlo son 0.8 y 0.75 respectivamente. Si hay humo, encuentre la probabilidad de que ambos dispositivos lo detecten.
4. En las pasadas elecciones presidenciales el 44% de los votantes estuvo a favor de Andrés Manuel López Obrador (AMLO). Se reporta que el 60% de los votantes en favor de AMLO fueron menores de 22 años, mientras que con respecto a los otros candidatos los votantes a su favor menores de 22 años solo fue el 10%. Si escogemos a una persona de 20 años al azar. Encuentre la probabilidad de que haya votado por AMLO.
5. Para enseñar a los trabajadores cierta habilidad industrial existen dos métodos: A y B. El porcentaje de fracasos de 20% y 10% para A y B respectivamente. No obstante, B es utilizado en el 40% de los casos porque cuesta más. Un trabajador fue entrenado de acuerdo con uno de los métodos, pero no logró ejecutarlo correctamente. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido por el método A?
6. En la Ciudad de México se observó que el 75% de los trabajadores hace uso del transporte púbico para llegar a su trabajo, mientras que el porcentaje restante lo hace en automóvil particular. De aquellos que usan el transporte público, 80% utiliza el metro, mientras que el 20% restante utiliza el Metrobús/ Mexibus o combi. ¿Si entrevistamos a un trabajador, cual es la probabilidad de que use metro? ¿Cuál es la probabilidad de que use Metrobús o combi?
7. Una prueba para diagnosticar COVID 19 tiene una efectividad del 90%, en otras palabras, detectará con una probabilidad de 0.9 si una persona porta el virus, o bien, no lo porta. Únicamente el 2% de la población tiene COVID 19. Si una persona escogida aleatoriamente de la población tiene COVID 19. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que realmente tenga la enfermedad? ¿Diría que esta prueba es confiable?
8. En un fraccionamiento residencial de la Ciudad de México se bombea agua potable, para tal efecto se poseen dos bombas, una para trabajar y otra de repuesto, ambas son independientes. La probabilidad de que una de las dos falle es de 0.1. Calcule la probabilidad de que ambas bombas fallen un día determinado.
9. Un juego consiste en ir de un extremo a otro por alguno de cuatro caminos C1, C2, C3 y C4, las probabilidades de elegir alguno de ellos son 0.15, 0.35, 0.3 y 0.20 respectivamente. Cada camino tiene una trampa y las probabilidades de caer en ella son 0.6, 0.4, 0.5 y 0.5 respectivamente. ¿Si la persona cae en la trampa, cual es la posibilidad de que haya escogido el camino 2? ¿Y el camino 3?

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

4.1 VARIABLES ALEATORIAS

Definición 4.1
Dado un experimento con espacio muestral *S*, llamaremos **variable aleatoria** del experimento a la función numérica que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral.

En la Teoría de Probabilidades, generalmente a las variables aleatorias se les simboliza por las letras mayúsculas X, Y, Z, etc. Y sus elementos por las letras minúsculas correspondientes.

Sea S el espacio muestral del experimento, y $\boldsymbol{R_x} \subset \boldsymbol{R}$, en donde **R**, representa al conjunto de los números reales. Por lo tanto: $\boldsymbol{X}: \boldsymbol{S} \mapsto \boldsymbol{R_x}$ representa a la función cuyo dominio es **S** y rango **R**$_{\mathbf{x}}$. Su representación gráfica es la siguiente:

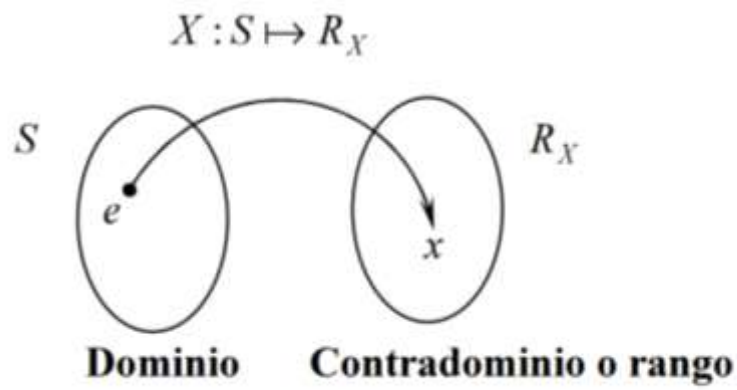


Fig. 4.1 Representación gráfica de una variable aleatoria.

Los elementos del rango de una variable aleatoria generalmente se representan por letras minúsculas correspondientes a la variable aleatoria. De tal manera que: $\boldsymbol{X(e) = x}$, representa a la función **X** evaluada en el elemento muestral **e**, cuya imagen es **x**.

4.2 VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS (VAD)

Definición 4.2
Dado un experimento aleatorio y X una variable aleatoria de este con rango R_X, llamaremos a X **Variable aleatoria discreta (VAD),** cuando el conjunto R_X resulta finito o infinito numerable.

NOTA: Las VAD tienen cabida cuando la variable del experimento requiere de un conteo para determinar sus elementos.

EJEMPLOS 4.2

1. Al analizar una muestra de 10 artículos entre los cuales existen 3 defectuosos, podemos definir a la variable aleatoria X, como: La cantidad de extracciones sin reemplazo necesarios para encontrar los 3 artículos defectuosos de la muestra. $\boldsymbol{R_X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}$, conjunto finito.
2. Si el experimento consiste en lanzar una moneda, y la variable aleatoria X, se define como: La cantidad de lanzamientos hechos hasta obtener la primera águila. Tendremos una variable discreta cuyo rango es:
$\boldsymbol{R_X = \{1, 2, 3, 4 \dots\}}$, conjunto infinito numerable.

4.3 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Definición 4.3
Dado un experimento y una variable aleatoria discreta X en él, con rango igual a $\boldsymbol{R_X} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ (puede ser un infinito numerable). Definimos a la **Función de Probabilidad** de la variable discreta X, como:

$$\boldsymbol{p(x_k) = P(X = x_k), x_k \in R_x} - Si\ x_k \in R_x$$
$$\boldsymbol{p(x_k) = 0} - Si\ x_k \notin R_x$$

4.3 Función de probabilidad

Observamos que **p(x_k)** debe cumplir con las siguientes condiciones:

a) $\boldsymbol{p(x_k)} \geq \boldsymbol{0}$ para toda *k*, las probabilidades siempre son mayores o igual a cero.

b) $\boldsymbol{\sum_{k\geq 1} p(x_k) = 1}$. La suma de todas las probabilidades siempre debe ser igual a uno.

La Función de Probabilidad la podemos ilustrar por medio de diagramas de Venn:

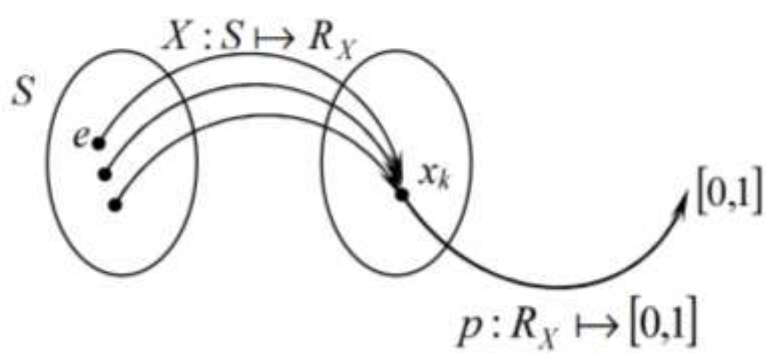


Fig.4.2 Representación gráfica de la función de probabilidad con el espacio muestral y la variable aleatoria correspondiente.

A partir de la Función de probabilidad, surge un nuevo concepto: la Distribución de Probabilidad.

4.4 Distribución de probabilidad

Definición 4.4
Sea X una variable aleatoria con rango $\boldsymbol{R_X} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ (puede ser un infinito numerable), y función de probabilidad p(x), llamaremos **Distribución de Probabilidad**, al conjunto de parejas $(\boldsymbol{x_k}, \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_k}))$**,** para toda $\boldsymbol{x_k} \in \boldsymbol{R_x}$, tal que se cumple:

1. $\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{x_k}) \geq \boldsymbol{0}, para\ toda\ \boldsymbol{x_k} \in \boldsymbol{R_x}$
2. $\sum_k \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x_k}) = \boldsymbol{1}.$

Definición 4.5 Función de distribución acumulada (FDA)
Sea X una variable aleatoria con rango $\boldsymbol{R_X} = \{\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ (puede ser un infinito numerable), y función de probabilidad p(x), llamaremos **Función de distribución acumulada (FDA)** de X, a la función positiva y no decreciente definida en todos los reales y discontinua en cada punto $\boldsymbol{x_k} \in \boldsymbol{R_x}$ **,** tal que:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{x_k})\ , para\ toda\ \boldsymbol{x_k} \in \boldsymbol{R_x}\ y\ \boldsymbol{x_k} \leq \boldsymbol{x}.$$

4.5 Función de distribución acumulada (FDA)

A partir de la definición de F (x), fácilmente se deduce que:

a. F(x) es una función **no decreciente**, es decir, para todos los reales x, y, si $x < y, entonces\ F(x) \leq F(y)$.
b. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
c. La gráfica de F(x) es una función escalonada, en donde cada salto representa la probabilidad del punto de discontinuidad a la derecha.

EJEMPLOS 4.3

Analicemos el ejemplo relativo al lanzamiento de tres monedas. En donde X representa la cantidad de águilas en el lanzamiento de las tres monedas. Es claro que $R_x = \{0,1,2,3\}$. Por otro lado, las probabilidades para los valores de X son:

$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{3}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}}$**,** $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{1}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{1}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{8}}$**,** $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{2}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{2}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}} = \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{8}}$**,** $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{3}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{3}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}}$

Es decir, $p(x) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}}\ para\ x = \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{3}, \frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{8}}\ para\ x = \boldsymbol{1}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{2},\ \ \boldsymbol{0}\ para\ otro\ valor.$

Mientras que su función de Distribución Acumulada será: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}, si\ x < \boldsymbol{0}.$ $\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{8}}, si\ \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{1}.$ $\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{8}}\ si\ \boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{2}.$ $\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{8}}, si\ \boldsymbol{2} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{3}.$ $\boldsymbol{1}, si\ \boldsymbol{3} \leq \boldsymbol{x}.$

4.4 VALOR ESPERADO DE UNA VAD

4.6 Valor esperado de X

Definición 4.6
Sea X una variable aleatoria con rango $\boldsymbol{R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}}$ (puede ser un infinito numerable), y función de probabilidad p(x), llamaremos **valor esperado** de X (o esperanza matemática de X), a la cantidad que denotaremos por ***E(X)*** o $\boldsymbol{\mu_x}$, y se calculará por:

$$\boldsymbol{E(X) = \sum_{k\geq 1} x_k\, p(x_k)}$$

NOTAS

1. El valor esperado de una variable aleatoria discreta **X** es un parámetro de dicha variable, que representa el **valor promedio** que se espera suceda al repetir el experimento, en forma **independiente**, una gran cantidad de veces. Se concluye de lo ya mencionado que ***E(X)*** siempre es un valor intermedio de los $\boldsymbol{R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}}$, pero no necesariamente debe coincidir con alguno de estos valores.

2. Cuando la variable aleatoria discreta **X**, tiene un rango infinito numerable, el valor esperado es una serie, $\boldsymbol{E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p(x_k)}$. Si la serie converge absolutamente, $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p(x_k) < \infty}$, entonces ***E(X)*** se designa como un valor promedio de **X**.
3. Cuando la variable aleatoria discreta X tiene un rango finito, el valor esperado $\boldsymbol{E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, p(x_k)}$, se puede considerar como un valor **medio ponderado** de los valores $R_X, x_1, x_2, \dots, x_n$, con pesos respectivos $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$. Por otro lado, debemos tener bien en claro que ***E(X)*** y promedio ponderado de un conjunto de datos, no son sinónimos. Puesto que ***E(X)*** es un parámetro asociado a una variable aleatoria discreta ***X***, mientras que el promedio ponderado es el resultado de una combinación aritmética entre ciertos datos.

4.4.1 PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO DE UNA VAD

1. Valor esperado de una constante. Sea ***X=b*** constante, entonces ***E(b)=b***.
2. Si realizamos un cambio variable lineal ***Y=aX+b***, en donde *a* y *b* son constantes, el valor esperado de la nueva variable estará dado por *E(Y)=aE (X) +b*.

4.5 VARIANZA DE UNA VAD

Un solo parámetro no es suficiente para describir el comportamiento de una variable aleatoria discreta. Por tal razón, es necesario recurrir a otro parámetro que nos indique la variabilidad de los valores de la variable en función de su valor esperado.

4.7 Varianza

Definición 4.7
Dado un experimento y una variable aleatoria discreta X en él con rango $\boldsymbol{R_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}}$ (puede ser un infinito numerable), y función de probabilidad p(x), llamaremos **varianza** de X, a la cantidad que simbolizaremos con ***V(X)*** o$\boldsymbol{\sigma_X^2}$, y se calculará por:

$$\boldsymbol{V(X) = \sum_{k\geq 1}(x_k - E(X))^2\, p(x_k)}$$

Debido a que las unidades en las que medimos la variable aleatoria no y su varianza no coincides, introducimos un nuevo concepto en base a la raíz cuadrada positiva de la varianza.

4.8 Desviación estándar

Definición 4.8
Llamaremos desviación estándar de la variable aleatoria discreta ***X***, a la raíz cuadrada positiva de la varianza: $\boldsymbol{\sigma_X = \sqrt{V(X)}}$

OBSERVACIÓN

La varianza de la variable aleatoria discreta ***X*** es un parámetro positivo de dicha variable el cual representa el valor esperado de los cuadrados de las desviaciones que tiene cada uno de los valores $\boldsymbol{x_k \in R_x}$, con respecto al valor esperado de la variable aleatoria discreta ***X***.

4.5.1 PROPIEDADES DE LA VARIANZA DE UNA VAD

1. De la definición de valor esperado de una variable aleatoria se deduce que: $\boldsymbol{V(X) = \sum_{k\geq 1}\left(x_k - E(X)\right)^2 p(x_k) = E[X - E(X)]^2}$.
2. Para los cálculos la varianza se obtiene como $\boldsymbol{V(X) = E[X - E(X)]^2}$.
3. La varianza de una constante vale cero. Si ***X=c***, entonces ***V(X)=0***.
4. Si realizamos un cambio lineal de variable ***Y=aX+b***, en donde a y b son constantes la varianza de la nueva variable estará dada por ***V(Y)=a²V(X)***.

EJERCICIOS DE VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

1. Sea (***x_k, p(x_k)***) la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta ***X***. Según se muestra explícitamente:

X=x	-3	-1	1	2
p (x)	0.4	0.3	0.2	0.1

Encuentre el valor esperado y la varianza de ***X***.

a. $E(X) = (-3 \times 0.4) + (-1 \times 0.3) + (1 \times 0.2) + (2 \times 0.1) = \mathbf{-1.1}$

b. $V(X) = \left(-3 - (-1.1)\right)^2(0.4) + \left(-1 - (-1.1)\right)^2(0.3) + \left(1 - (-1.1)\right)^2(0.2) + \left(2 - (-1.1)\right)^2(0.2) = 1.444 + 0.003 + 0.882 + 0.961 = \mathbf{3.29}$

La desviación estándar es igual a $\sqrt{3.29} = \mathbf{1.814}$

Con la segunda propiedad, el cálculo se vuelve más sencillo:

$$V(X) = (-3^2 \times 0.4) + (-1^2 \times 0.3) + (1^2 \times 0.2) + (2^2 \times 0.1) - (-1.1^2) = 3.6 + 0.3 + 0.2 + 0.4 - 1.21$$
$$= 4.5 - 1.21 = \mathbf{3.29}$$

2. Sea (***y***y_k, $p(y_k)$) la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta ***Y***, definida por ***Y=25X-10***, cuyos valores se encuentran en la siguiente tabla, Encuentre para ***Y*** el valor esperado y la varianza.

Y=y	15	40	90	140	165
X=x	1	2	4	6	7
p(y)=p(x), y=25x-10	0.15	0.20	0.35	0.25	0.05

De la tabla de distribución y las fórmulas para el valor esperado de y la varianza podemos calcular lo solicitado directamente. Pero de la relación ***Y=25X-10***, los cálculos se simplifican: ***E(X)=E(25X-10) =25E(X)-10***. Entonces:

a. $E(X) = (1 \times 0.15) + (2 \times 0.2) + (4 \times 0.35) + (6 \times 0.25) + (7 \times 0.05) = \mathbf{3.8}$
b. $E(Y) = 25E(X) - 10 = (25 \times 3.8) - 10 = \mathbf{85}$
c. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = (1^2 \times 0.15) + (2^2 \times 0.2) + (4^2 \times 0.35) + (6^2 \times 0.25) + (7^2 \times 0.05) - (3.8)^2 = 0.15 + 0.8 + 5.6 + 9 + 2.45 - 14.44 = 18 - 14.44 = \mathbf{3.56}$
d. $V(Y) = 25^2 V(X) = (625 \times 3.56) = \mathbf{2225}$
e. $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = 25\sqrt{V(X)} = 25\sqrt{3.56} = \mathbf{47.17}$

PREGUNTAS DE VAD

1. Los valores de una variable aleatoria discreta se obtienen por medio de...
2. ¿Los valores de una variable aleatoria pueden ser negativos?
3. ¿Qué diferencia existe entre una función de probabilidad y una distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta X?
4. Al sumar todas las probabilidades de la distribución de probabilidad de una VAD X, el resultado debe ser igual a...
5. ¿Qué representa la función de distribución acumulada de una VAD?
6. ¿En los valores de una VAD cómo es la función de distribución acumulada?
7. La varianza de una variable aleatoria se puede entender como el valor esperado del...
8. ¿Qué representa el valor esperado de una VAD X? (Explique, no lo defina)
9. ¿La varianza de una VAD puede ser negativa?
10. Al sumar todas las posibilidades de la distribución de probabilidad de una VAD X, el resultado es igual a:
    a. Depende de los valores de la variable X
    b. Uno
    c. Menor a uno
    d. Cualquier valor entre 0 y 1
11. Indique cuál de los siguientes incisos describe a la definición de una variable aleatoria.
    a. Una representación de los eventos.
    b. Una representación del espacio muestral.
    c. Una asignación de probabilidades para los elementos muestrales.
    d. Una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral.

EJERCICIOS DE VAD

1. Con el propósito de verificar la exactitud de sus estados financieros, las compañías tienen auditores permanentes para verificar los asientos contables. Supóngase que los empleados de una compañía efectúan asientos erróneos el 5% de las veces. Si un auditor verifica tres asientos al azar. Encuentre la probabilidad de que el auditor detecte más de un error.
2. Un cliente potencial para una póliza de seguro por $20000 (dólares) tiene una casa en un área que, de acuerdo con la experiencia, puede sufrir una pérdida total en un año con una probabilidad de 0.001 y una pérdida del 50% con una probabilidad de 0.01. ¿Qué prima tendría que cobrar la compañía de seguros por póliza anual, para salir a mano con todas las pólizas de $20000 de este tipo, ignorando las otras pérdidas parciales?
3. Sea X una variable aleatoria que representa el número de clientes que en un día se quejan por el servicio de una tienda, cuya función de probabilidad está dada por: $f(x) = 0.1(x+1), con\ x = 0,1,2,3$. Y $f(x) = 0, con\ x \neq 0,1,2,3$. Encuentre cuantos clientes se espere acudan a quejarse por el servicio en un día determinado.
4. El gerente de un almacén en una fábrica ha construido la siguiente distribución de probabilidad para la demanda diaria (número de veces utilizada) para una herramienta en particular.

x	0	1	2
P(X=x)	0.1	0.5	0.4

   Le cuesta a la fábrica 90 pesos cada vez que se utiliza tal herramienta. Encuentre la media y la varianza del costo diario para el uso de tal herramienta.
5. La producción de artículos domésticos diaria en una fábrica es de 12 aparatos, de los cuales hay dos defectuosos. Se elige una muestra de 3 aparatos y sea X la variable aleatoria que asigna la cantidad de aparatos defectuosos en la muestra. Determine la función de probabilidad de X.
6. Un vendedor de equipo pesado puede entrevistar a uno o dos clientes diariamente con una probabilidad de 1/3 y 2/3, respectivamente. Cada entrevista tendrá como resultado una **no venta** o **una venta** de $50000 (dólares) con probabilidades de 0.9 y 0.1, respetivamente. Obtenga la distribución de probabilidad para las ventas diarias. Encuentre la media y desviación estándar de las ventas diarias.
7. Una agencia de alquiler que arrienda equipo pesado por días se da cuenta de que un equipo costoso es arrendado en promedio solamente un día de cinco. Si el alquiler de un día es independiente del alquiler en cualquier otro día, encuentre la distribución de probabilidad para X, que represente el **número de días entre dos alquileres**.

MODELOS DISCRETOS DE PROBABILIDAD

4.6 MODELO BINOMIAL

En el estudio de la probabilidad y la estadística el concepto de independencia juega un papel muy importante. Por consiguiente, existen muchos fenómenos probabilísticos discretos en donde las pruebas de los experimentos se consideran independientes. Uno de tales modelos discretos que tiene mucho auge en los experimentos con pruebas independientes es el **modelo binomial**.

Definición 4.9

Un experimento aleatorio se llama **binomial** cuando cumple con las siguientes condiciones:

1. El experimento consta de n (número infinito) pruebas independientes
2. Cada prueba tiene solo dos resultados. Éxito y fracaso.
3. La probabilidad de éxito en una prueba es p y la de fracaso q=1-p, y se mantienen constantes de prueba en prueba.

4.9 Experimento binomial

4.10 Ensayos de Bernoulli

NOTAS

- El éxito en un ensayo se entiende como el cumplimiento de la variable aleatoria. V.gr. Si la variable X se define como cantidad de artículos defectuosos. Un éxito será cuando el artículo sea defectuoso.
- Un experimento de Bernoulli se termina cuando ocurre la n-ésima prueba.

Definición 4.10

A cada una de las pruebas efectuadas en un experimento binomial le llamaremos **Ensayos de Bernoulli**.

Definición 4.11

A la variable aleatoria X definida en un experimento binomial que representa la cantidad de éxitos en n ensayos de Bernoulli le llamaremos **variable aleatoria binomial**.

4.11 Variable aleatoria binomial

EJEMPLOS 4.5

Un sistema de tres radares para detectar carros a gran velocidad se instala en una carretera. Cada radar funciona independientemente con una probabilidad de detectar un carro que viaje a gran velocidad igual a 0.99. Calcule la probabilidad de que un carro que viaja a gran velocidad, por dicha carretera, no sea detectado. Considerando la variable aleatoria X como **cantidad de radares que detectan el carro que viaja a gran velocidad**. Determine que este experimento es de tipo binomial.

Comprobación: Verificar que se cumplen las condiciones de un experimento binomial.

1. El experimento consiste en tres ensayos cada uno de ellos determina si el radar detecta o no al carro que viaja a gran velocidad. Por las condiciones del problema vemos que los ensayos son independientes.
2. Al pasar el carro a gran velocidad por un radar sólo puede ocurrir uno de dos escenarios: que sea detectado o no, representando un *éxito* o *fracaso*.
3. El éxito, ser detectado, de las condiciones del problema se conserva constante de radar en radar e igual a 0.99. Igualmente, el fracaso es 0.01.

> Teorema 4.1
> Si X es una variable aleatoria binomial y $R_x = \{0,1,\ldots,n\}$, con éxito *p* y fracaso *q=1-p*, entonces se cumplirá:
> $P(X=k) = C_k^n p^k q^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n.$ $\sum_{k=0}^{n} C_k^n p^k q^{n-k} = 1$ $E(X) = np, V(X) = npq.$

4.6.1 CÁLCULO DE PROBABILIDADES D ELOS MODELOS BINOMIALES Y USO DE TABLAS BINOMIALES

En forma general para calcular las probabilidades de una VAD X con distribución binomial, se emplea el Teorema 4.1.

$\boldsymbol{P(X=k) = C_k^n p^k q^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n.}$ Donde: *n* es la cantidad de ensayos, *p* el éxito de un ensayo, y *q* el fracaso. Si el valor de n se encuentra entre 1 y 30, y los valores de *p* son: 0.05,0.1,0. 15, ..., hasta 0.95, podemos emplear tablas para distribución acumulada de la binomial.

4.6.1 USO DE TABLAS BINOMIALES

Las tablas binomiales están dadas para la función de distribución acumulada, como se muestra a continuación:

Función acumulada de la distribución Binomial, $F(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$

Valores de p

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
14	**8**	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880	0.6627	**0.5141**	0.3595	0.2195	0.1117	0.0439	0.0115	0.0015	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102	0.8328	**0.7207**	0.5773	0.4158	0.2585	0.1298	0.0467	0.0092	0.0004
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713	0.9368	**0.8757**	0.7795	0.6448	0.4787	0.3018	0.1465	0.0441	0.0042
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935	0.9830	**0.9602**	0.9161	0.8392	0.7189	0.5519	0.3521	0.1584	0.0301

Las probabilidades más comunes para calcular son: $P(X \le k), P(X \ge k)\ y\ P(k \le X \le m)$. Ejemplos:

a) $P(X \le 9) = F(9) = \mathbf{0.7207}$, $P(X < 10) = P(X \le 9) = F(9) = \mathbf{0.7207}$.
b) $P(X \ge 10) = 1 - F(9) = 1 - 0.7207 = \mathbf{0.2793}$, $P(X > 9) = P(X \ge 10) = 1 - F(9) = 1 - 0.7207 = \mathbf{0.2793}$
c) $P(8 \le X \le 11) = F(11) - F(8) = 0.9202 - 0.5141 = \mathbf{0.4061}$.

NOTA: Para resolver problemas de modelos discretos se recomienda seguir tres pasos.

1. Definir a la variable aleatoria en estudio.
2. Identificar el modelo al que pertenece la variable definida.
3. Aplicar las fórmulas correspondientes para el cálculo de probabilidades, valor esperado y varianza.

EJEMPLO 4.6

Un sistema para detectar carros a gran velocidad consta de 3 radares que se instalan en una carretera. Cada radar funciona independientemente, con una probabilidad de detectar a un carro que viaja a gran velocidad igual a 0.99. Considerando a la variable aleatoria X como **el número de radares que detectan al carro que viaja a gran velocidad**. Determine:

a) Distribución de probabilidad para X.
b) Valor esperado y varianza de X.

Del teorema 4.1, para *p=0.99* y *q=0.01*, resultará:

$$P(X=0)=C_0^3(0.99)^0(0.01)^3=\mathbf{0.000001}$$

$$P(X=1)=C_1^3(0.99)^1(0.01)^2=\mathbf{0.000297}$$

$$P(X=2)=C_2^3(0.99)^2(0.01)^1=\mathbf{0.029403}$$

$$P(X=3)=C_3^3(0.99)^3(0.01)^0=\mathbf{0.970299}$$

Posteriormente, se obtiene: $E(X)=np=(3\times 0.99)=\mathbf{2.97}$, $V(X)=npq=(3\times 0.99\times 0.01)=\mathbf{0.0297}$

EJERCICIOS

1. La revisión aduanal en el Aeropuerto se efectúa aleatoriamente de esta manera: En la salida se encuentra un semáforo, si al pasar se activa la luz roja se realiza una revisión, si se activa la verde, la revisión no se lleva a cabo. La luz roja aparece con una frecuencia del 10%. Si se consideran 18 viajeros. ¿Cuál es la probabilidad de que... a) 3 o más sean revisados?, b) menos de 5 sean revisados?, c) ¿Cuántos de los siguientes 100 pasajeros se espera que sean revisados?
2. Generalmente 15 de cada 100 hijos de padres alcohólicos nacen con deficiencias físicas o mentales.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 10 nacimientos resulten por lo menos 2 casos de niños con deficiencias físicas o mentales?
   b) ¿De los siguientes 20 nacimientos, cuantos se espera que no tengas deficiencias físicas o mentales?
3. Una máquina produce generalmente el 5% de objetos defectuosos. Una muestra de 8 objetos se selecciona al azar de la línea de producción. Si la muestra produce más de dos objetos defectuosos, se inspeccionará el 100% de la producción.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra la inspección?
   b. ¿Cuántos objetos se espera que no estén defectuosos en una muestra de 50?
4. De una población humana muy grande de la cual el 12% sufre diabetes se seleccionan 20 personas al azar.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 5 de estas personas sean diabéticas?
   b) ¿Cuál es la cantidad de personas que se espera sean diabéticas de las 20 seleccionadas?

4.7 MODELO GEOMÉTRICO

4.12 Experimento geométrico

Definición 4.12

Un experimento aleatorio se llama **Geométrico** si cumple con las condiciones:

1. El experimento consta de ensayos independientes.
2. Cada ensayo tiene solo dos resultados, éxito y fracaso.
3. La probabilidad de éxito en un ensayo es p y la de fracaso es q=1-p, y se mantienen constantes de ensayo en ensayo.
4. El experimento termina cuando ocurre el primer éxito en un ensayo.

Definición 4.13

A la variable aleatoria discreta X definida en un experimento geométrico que representa a la cantidad de pruebas necesarias hasta obtener el primer éxito, se le llama **variable aleatoria geométrica**.

4.13 Variable aleatoria geométrica

EJEMPLOS 4.7

1. Si el 45% de la población de México está a favor del candidato Andrés Manuel López Obrador para las elecciones presidenciales del 2018, podemos definir a la variable aleatoria:
   X: Cantidad de personas que se entrevistarán aleatoriamente hasta obtener la primera que esté a favor del candidato.
2. Si una máquina despachadora de refrescos arroja un poco más de 200 ml por vaso, derramándose el líquido en un 5% de los vasos despachados. La variable aleatoria se define:
   X: Cantidad de vasos despachados hasta obtener el primero que se derrama.

Simbolizaremos por *G(k:p)=P(X=k)* a la probabilidad de que el primer éxito ocurra en el ensayo *k*. La fórmula para calcular las probabilidades de un Modelo Geométrico está dada por el siguiente teorema.

Teorema 4.2

Si X es una variable aleatoria geométrica y con éxito *p* y fracaso *q=1-p*, entonces:

$G(k:p) = P(X = k) = q^{k-1}p, k = 1,2,3 \dots\ , \sum_{k=1}^{\infty} G(k:p) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = 1\ , E(X) = \frac{1}{p}, V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Para los cálculos:

a. $P(X \leq k) = 1 - q^k, para\ k = 1,2 \dots,\quad P(X \geq k+1) = P(X > k) = q^k, para\ k = 1,2, \dots$
b. $P(m \leq X \leq k) = q^{m-1} - q^k, para\ m, k = 1,2, \dots y\ m \leq k.$

NOTA

Con respecto a la definición de variable aleatoria con distribución geométrica debemos de observar que el rango de la variable a diferencia de la binomial comienza en 1 y no termina, es infinito.

EJEMPLO 4.8

Si el 25% de la población de México está a favor del candidato Andrés Manuel López Obrador para las elecciones presidenciales del 2018, podemos definir a la variable aleatoria:

a) Encuentre la probabilidad de que la primera persona que esté a favor del candidato Obrador se encuentre después de la quinta persona entrevistada.
b) ¿Cuántas personas se espera entrevistar hasta encontrar a la primera que esté a favor de Obrador?

Primer punto: Definir a la variable

X: Cantidad de personas que se entrevistarán aleatoriamente hasta obtener la primera que esté a favor del candidato.

Segundo punto: Clasificar el modelo, X cumple con una variable geométrica con *p=0.25* y *q=0.75*.

Tercer punto: Aplicación de las fórmulas. $P(X > 5) = q^5 = (0.75)^2 = \mathbf{0.2373}$, $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.25} = \mathbf{4.}$

EJERCICIOS

1. Una máquina despachadora de refrescos que arroja poco más de 20 ml por vaso, derramándose el líquido en un 5% de los vasos despachados. La variable aleatoria se define como X: Cantidad de vasos despachados hasta obtener el primero que se derrama. Considere que la forma de despachar el líquido es independiente de vaso en vaso. Calcula la probabilidad de que el primer vaso que se derrame se encuentre después de 15vo vaso despachado.
2. Un inspector de la SECOFI ha encontrado que en 7 de 10 tiendas que visita se presentan irregularidades. Si visita una serie de visitas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera tienda con irregularidades fuera encontrada después de revisar la cuarta? ¿Cuántas tiendas se espera que tenga que visitar para encontrar la primera con irregularidades?
3. En un lote grande 3 % de los artículos presentan defectos. Si se escoge al azar un artículo tras otro hasta encontrar uno defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que se deban inspeccionar más de 5 artículos?
4. Se estima que el 70% de una población de consumidores prefiera la marca de pasta de dientes A. ¿Cuál es la probabilidad de que al entrevistar al grupo de consumidores sea necesario entrevistar exactamente 4 personas para encontrar al primer consumidor que prefiere la marca A? ¿Y la probabilidad de entrevistar al menos 6 personas para el mismo caso?

4.8 MODELO HIPERGEOMÉTRICO

Un modelo probabilístico será de tipo hipergeométrico cuando los experimentos que se realizan con respecto a un evento E son tales que sus pruebas no son independientes. En estos modelos se consideran lotes de artículos, los cuales están constituidos de elementos divididos en dos clases. El experimento consiste en elegir una muestra de lote sin reemplazo y calcular las probabilidades cuando sus elementos pertenezcan a una de las clases.

4.14 Experimento Hipergeométrico

Definición 4.14
Un experimento aleatorio se llama **Hipergeométrico** si cumple con las condiciones:

1. El experimento se realiza considerando un lote de tamaño N en el cual sus elementos están divididos en dos clases de tamaños, m y N-m.
2. Se toma una muestra de tamaño n, sin reemplazo del lote.
3. Se calculan las probabilidades de que k elementos de una de las clases estén en la muestra de tamaño n.

4.15 Variable aleatoria hipergeométrica

Definición 4.15
A la variable aleatoria discreta X definida en un experimento hipergeométrico que representa a la cantidad de elementos que se encuentran en la muestra perteneciente a la clase de éxitos se le llama **variable aleatoria hipergeométrica**.

EJEMPLO 4.9

En un lote de 10 componentes electrónicos de TV en buen estado, se agregan 3 defectuosos, todos en apariencia y tamaños iguales. Una persona que compra 4 de tales componentes para reparar televisores. Calcule la probabilidad de que la persona tenga que regresar a reclamar al vendedor por haber obtenido componentes defectuosos.

Primer punto: Definir la variable. X: Cantidad de componentes defectuosos en la selección.

Segundo punto: Clasificación del modelo. Por las condiciones del problema deducimos que la selección se realizó sin reemplazo. Además, el tamaño del lote es finito e igual a 13, solo tenemos dos tipos de componentes, buenos y defectuosos. Entonces, X es una variable hipergeométrica, con: *N=13*, *n=4*, *m=3*.

Tercer punto: Aplicación de fórmulas. La persona reclamará si al menos un componente resulta defectuoso. Por lo tanto:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{C_0^3 C_4^{10}}{C_4^{13}} \approx 1 - 0.2937 = \mathbf{0.7063}$$

Teorema 4.3
Si X es una variable aleatoria hipergeométrica con m éxitos en una población de tamaño N de la cual se elige una muestra din reemplazo de tamaño n, entonces: $P(X = k) = \frac{C_k^m C_{n-k}^{N-m}}{C_n^N}, máx\{n + m - N, 0\} \leq k \leq mín\{n, m\}$, $\sum_{k=máx\{n+m-N,0\}}^{mín\{n,m\}} \left[\frac{C_k^m C_{n-k}^{N-m}}{C_n^N}\right] = 1$, $E(X) = n\left(\frac{m}{N}\right), V(X) = n\left(\frac{m}{N}\right)\left(1 - \frac{m}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

La probabilidad de que el comprador regrese a reclamar es bastante alta.

NOTA

Los modelos hipergeométricos debido a su naturaleza son empleados muy frecuentemente en **Teoría del Control Estadístico**, donde posee un rol importante al analizar los componentes de los lotes, para determinar si se acepta o rechaza en función de su clase, bueno o defectuoso.

EJERCICIOS

1. Para llevar a cabo un reporte de control de calidad sobre la fabricación empaques de embalaje, de un lote de 25 unidades, se elige una muestra aleatoria de 5 y se someten a pruebas, encaso de no presentar defectos entre ellos 5 el reporte se escribe satisfactorio. ¿Cuál es la probabilidad de que el reporte sea satisfactorio, si en el lote se han introducido 4 empaques dañados?
2. En el Aeropuerto Internacional Felipe Ángeles debido a la gran afluencia de pasajeros, únicamente 10% de ellos es revisado a la salida. Si de un grupo de 20 turistas, 13 tienen compras que exceden la cantidad permitida y se conserva el mismo porcentaje de revisiones para todos ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos personas revisadas tengan que pagar los impuestos correspondientes por exceder las compras permitidas por las autoridades del aeropuerto?
3. Se escogerán aleatoriamente sin reemplazo 8 objetos de un lote con 15 buenos y 6 defectuosos. A) Calcule la probabilidad de que se encuentren exactamente 2 defectuosos entre los 8 objetos seleccionados. B) Cuántos de los 8 objetos se espera que no estén defectuosos.

4.9 MODELO DE POISSON

Este modelo estudia los experimentos cuyos resultados tienen lugar en intervalos continuos, tales como tiempo, área, volúmenes, etc. Este modelo es discreto, puesto que, en los experimentos, solo nos interesará la cantidad de resultados que ocurren en un intervalo, más no su continuidad.

El modelo posee múltiples aplicaciones, v.gr., Líneas de espera o Teoría de colas, estudiadas en el área de Investigación de Operaciones, donde los tiempos de espera y servicio desean optimizarse.

4.15 Variable aleatoria de Poisson

> Definición 4.15
> A la variable aleatoria X definida en un experimento de Poisson, que representa a la cantidad de resultados, que ocurren en el intervalo de tiempo (t_0,t) se le llama **variable aleatoria de Poisson**.

En estas condiciones X es discreta con valores: 0,1,2,3...

Los intervalos dependen del experimento, y estos pueden ser: Un segundo, un minuto, una hora, un día, una semana, un año, un lustro, una década, un siglo, etc. Un metro cuadrado, una hectárea, etc. Un litro, un metro cúbico, entre otros.

EJEMPLOS 4.10

- La cantidad de accidentes automovilísticos mensuales en un cruce determinado.
- La cantidad de carros que llegan a un estacionamiento en cierta hora del día.
- El número de partículas que pasan a través de un contador en un milisegundo.
- Cantidad de árboles infectados por plaga en un área determinada.
- Llegada de clientes a una tienda en un intervalo de tiempo definido.

Simbolicemos por $\boldsymbol{P(k; \lambda t) = P(X = k)}$ La probabilidad de que en el experimento de Poisson ocurran k resultados en un intervalo *(t_0, t)*.

> Definición 4.17
> Llamaremos **Distribución de Probabilidad de Poisson,** a las parejas$(k, P(k; \lambda t))$, para *k* igual a 0,1,2,3...

> Teorema 5.16
> Si X es una variable aleatoria de Poisson en el intervalo $(t_0, t), y\ R_x = \{0,1,2, \dots\}$, entonces: $P(k; \lambda t) = P(X = k) = \left[\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right] e^{-\lambda t}\ k = 0,1,2, \dots\ ,\ \sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda t) = 1, \mu = E(X) = \lambda t\ ,\ \sigma^2 = V(X) = \lambda t$

El parámetro λ está dado por: $\boldsymbol{\lambda = \frac{E(X)}{t}}$ Representa la razón esperada de resultados en el intervalo de estudio.

En caso de que t sea igual a una unidad del intervalo (1 hora, 1 día, 1 metro, etc.), $\lambda\ y\ E(X)$ tienen el mismo valor numérico, En tal caso, podemos escribir la fórmula para el cálculo de probabilidades como: $P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

USO DE TABLAS DE POISSON

Las tablas de Poisson están dadas para la función de distribución acumulada, como se muestra a continuación.

Valores de $\mu = \lambda t$

x	4.00	4.10	4.20	4.30	4.40	4.50	4.60	4.70	4.80	5.00	5.20	5.30	5.40	5.50	5.60	5.70	5.80	5.90
0	0.0183	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0067	0.0055	0.0050	**0.0045**	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027
1	0.0916	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0404	0.0342	0.0314	**0.0289**	0.0266	0.0244	0.0224	0.0206	0.0189
2	0.2381	0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1247	0.1088	0.1016	**0.0948**	0.0884	0.0824	0.0768	0.0715	0.0666
3	0.4335	0.4142	0.3954	0.3772	0.3594	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2650	0.2381	0.2254	**0.2133**	0.2017	0.1906	0.1800	0.1700	0.1604
4	0.6288	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4405	0.4061	0.3895	**0.3733**	0.3575	0.3422	0.3272	0.3127	0.2987

Las probabilidades comúnmente calculadas son: $P(X \leq k), P(X \geq k)\ y\ P(k \leq X \leq m)$. Por ejemplo, para $\mu = 5.40$:

a) $P(X \leq 3) = P(3; 5.40) = \mathbf{0.2133}$, $P(X < 4) = P(3; 5.40) = \mathbf{0.2133.}$
b) $P(X \geq 3) = 1 - P(2; 5.4) = 1 - 0.0948 = \mathbf{0.9052}$, $P(X > 2) = P(X \geq 3) = 1 - P(2; 5.4) = 1 - 0.0948 = \mathbf{0.9052}$
c) $P(2 \leq X \leq 4) = P(4; 5.40) - P(1; 5.40) = 0.3733 - 0.0289 = \mathbf{0.3444}$

EJEMPLO 4.11

En una tienda los clientes llegan al mostrador conforme una distribución de Poisson con un promedio de 10 clientes/hora. En una hora dada, ¿cuál es la probabilidad de que lleguen al menos 5 clientes?

Identificación de datos: Variable aleatoria X- Cantidad de clientes que llegan a la tienda, $\lambda = \frac{10\ clientes}{hora}$, $t = 1\ hora$.

Por lo tanto, $\mu = \lambda t = \left(\frac{10\ clientes}{hora}\right) \times 1\ hora = 10\ clientes$, con lo cual:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)] =$$

$$1 - \left[\frac{e^{-10}(10)^0}{0\,!} + \frac{e^{-10}(10)^1}{1\,!} + \frac{e^{-10}(10)^2}{2\,!} + \frac{e^{-10}(10)^3}{3\,!} + \frac{e^{-10}(10)^4}{4\,!}\right] = 1 - 0.0293 = \mathbf{0.9707}$$

La probabilidad es muy grande, entonces, será muy probable que 5 o más clientes lleguen en el transcurso de una hora.

Igualmente, la probabilidad anterior pudo haberse calculado por tablas, con $\mu = \lambda t = 10\ clientes$.

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - P(4; 10) = 1 - 0.0293 = \mathbf{0.9707}$$

EJERCICIOS

1. Un becario comete en promedio 5 errores al transcribir un documento en Word. Si los errores cometidos son independientes y siguen un proceso de Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de que cometa 1 o más errores en la siguiente página que transcriba?
2. Desde el año 2020 el cierre de empresas por problemas de índole mundial ha ocurrido en promedio, a razón de 5.7 cierres por año. Suponiendo que el número de cierres por año tiene una distribución de Poisson. Encuentre la probabilidad de que ninguna empresa cierre durante un periodo de 4 meses.
3. Supóngase que una cajera de Metro atiende a razón de 6 clientes por cada 5 minutos, y además que la cantidad de personas atendidas sigue un proceso de Poisson. Calcule la probabilidad, de que dicha cajera atienda a sólo un cliente en el transcurso de los siguientes 5 minutos.

PREGUNTAS DE MODELOS DISCRETOS

1. ¿Qué representa P(X=k) para una variable X con distribución binomial?
2. ¿Qué representa P(X=k) para una variable X con distribución geométrica?
3. ¿Qué representa P(X=k) para una variable X con distribución hipergeométrica?
4. ¿Qué representa P(X=k) para una variable X con distribución de Poisson?
5. ¿Cuándo se termina el experimento de Bernoulli?
6. ¿Qué diferencias fundamentales existen entre los modelos binomial y geométrico?
7. ¿Qué semejanzas existen entre los modelos binomial y geométrico?
8. ¿En qué modelo siempre son iguales el valor esperado y su varianza?
9. ¿En qué modelo discreto la dependencia entre sus pruebas es una de sus características?
10. ¿Qué valores puede tomar el rango de una variable aleatoria con distribución geométrica?
11. ¿Qué valores puede tomar el rango de una variable aleatoria con distribución de Poisson?

VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

En la parte 4 se repasaron las variables aleatorias que requieren del conteo de sus elementos, dando origen a las variables aleatorias discretas, esto es, variables con dominios finitos o infinitos numerables. Más sin embargo en la práctica resultan una infinidad de experimentos en los cuales sus resultados se obtienen por mediciones y sus valores pueden ser cualquiera de los puntos de un intervalo.

EJEMPLOS 5.1

a) Al lanzar una moneda puede interesarnos predecir el área en la que ella caería.

En este caso podemos apreciar que la cantidad de resultados posibles no es contable, puesto que un resultado puede ser cualquier región de un área determinada y del Cálculo sabemos que un área tiene una cantidad no numerable de puntos.

b) La humedad en cierta región podemos medirla y asignarle a cada medición de humedad, un punto único en un intervalo.

c) La estatura de los estudiantes de la Universidad.

Al medir a los estudiantes podemos asignarles a cada una de sus estaturas un valor dentro de un intervalo.

d) El tiempo de espera en una fila de una oficina, negocio, etc.

Al medir el tiempo de espera de las personas al establecimiento se le puede asignar un punto cualesquiera de un intervalo.

Definición 5.1
Una variable aleatoria X de un experimento aleatorio dado con rango R_X , la llamaremos: “Variable Aleatoria Continua”, abreviada por vac, cuando el conjunto R_X resulta ser un intervalo del conjunto de los números reales R.

Como vimos en los ejemplos anteriores generalmente este tipo de variables tiene cabida cuando la variable del experimento es tal que se requiere de una medición para determinar sus elementos.

Para la asignación de probabilidades de las variables aleatorias continuas a diferencia de las variables aleatorias discretas, resulta un poco más complejo el problema, puesto que en éstas últimas podemos contar las probabilidades $P(X = x_k)$ y posteriormente sumarlas, mientras que en las variables aleatorias continuas no se puede hacer. Por otro lado, en las variables aleatorias continuas X la cantidad de elementos no es contable. Por lo tanto, $P(X = x)$ pierde significado, incluso como veremos en unos momentos, a diferencia de las variables aleatorias discretas, la probabilidad en un punto de una variable aleatoria continua “siempre será igual a cero”.

El primer problema a resolver en las variables aleatorias continuas consiste en la asignación de probabilidades. Continuando el uso de la teoría de funciones, tendremos que introducir una función que nos permita realizar el cálculo de probabilidades de las variables aleatorias continuas.

5.1.1 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD

Definición 5.2

A la función sumable f (x) en todos los reales; que cumple, con las condiciones siguientes le llamaremos “Función de Densidad de Probabilidad”, abreviado por fdp, de la variable aleatoria continua X.

a).- $\mathbf{f}\,(x) \geq 0$, para toda $x \in \mathbf{R}$.

b). $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

c).- Para cualesquier reales *a* y *b*, tales que $a \leq b$; tenemos $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$**a**

Antes de continuar debemos notar que f (x) no representa alguna probabilidad. Las Probabilidades en un intervalo (a, b) están representadas por el área bajo la curva de la función f (x) , en dicho intervalo.

Ver la figura 5.1

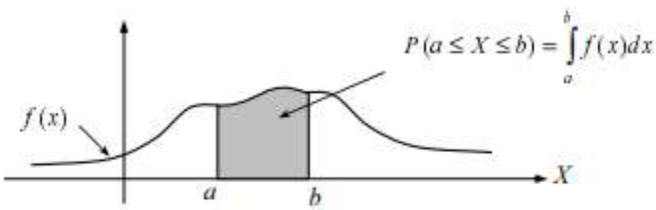


Fig. 5.1 Muestra el área bajo la curva de f (x) , en el intervalo (a, b) .

5.1.2 FUNCIÓN ACUMULADA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Definición 5.3

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f (x) , llamaremos función de distribución acumulada (fda) de la variable aleatoria continua X, a la función F (x) definida en todos los reales, tal que:

$$f(x) = P(X \leq x) = \int_{-\propto}^{\propto} f(t)dt \quad para\ toda\ x \in R$$

5.1.2A PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN ACUMULADA

a) *F*(*x*), es una función no decreciente; es decir, para todos los reales *x* e *y*, si **x** ⍰ **y** , entonces *F*(*x*) ⍰ *F*(*y*) .

b) lím F (x) = 0 . Se deduce fácilmente de la definición de una función de distribución acumulada

c) lím F (x) = 1 . Se deduce inmediatamente del inciso b) de la definición de una función de densidad de probabilidad.

d) La función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua es continua.

e) La función de densidad de una variable aleatoria continua X se obtiene de la acumulada

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

f) Con la función de distribución acumulada se pueden calcular probabilidades

$$P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b)$$

$$P(a \leq X) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 1 - F(a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

5.2 VALOR ESPERADO Y VARIANCIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Los parámetros el valor esperado y la variancia de una variable aleatoria discreta los estudiamos en la parte 4. Para las variables aleatorias continuas la interpretación de éstos se conserva, sólo cambiará su fórmula para hacer cálculos, puesto que la sumatoria se cambia por una integral.

> Definición 5.4
>
> Sea *X* una variable aleatoria continua con función de densidad, $f(x)$, llamaremos valor de *X* (o esperanza matemática de *X*), al valor que denotaremos por $E(X)$ o , y se calcula por:
>
> $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

5.2.1 PROPIEDADES DEL VALOR ESPERADO DE UNA VAC

Las propiedades son las mismas que en las variables aleatorias discretas. Sea *X* una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, entonces se tienen las siguientes propiedades.

$$a. Si\ Y = h(X), entonces\ E(Y) = E\big(h(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx$$

$$b. Si\ Y = h(X) = aX + b, entonces\ E(Y) = aE(X) + b$$

a. Si X=c, entonces E(X)=c. Es decir el valor esperado de una constante, es la misma constante
b. En particular; si Y=aX, entonces E(Y)=aE(X)

5.2.1 VARIANCIA DE UNA VARIABLE ALEATORIA CONTINUA

Definición 5.5

Dado un experimento y una variable aleatoria continua X en él, con función de densidad $f(x)$ llamaremos variancia de X al valor que denotaremos por $V(X)$ o σ^2, y se calcula:

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$$

se llama desviación estándar de la variable aleatoria continua X, a la raíz positiva de la

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)}$$

5.2.1 PROPIEDADES DE LA VARIANCIA DE UNA VAC

Las propiedades son las mismas que en las variables aleatorias discretas. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$, entonces se tienen las siguientes propiedades.

$$a.\ \ V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx = E[X - E(X)]^2$$

$$b.\ \ V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

c. Si $Y = h(X) = aX + b$, entonces $V(Y) = a^2V(X)$. En particular; si $X = c$, entonces $V(X) = 0$, puesto que no existe variabilidad entre los elementos de una variable aleatoria continua constante. En particular; si $Y = aX$, entonces $V(Y) = a^2V(X)$.

EJEMPLOS 5.2

1.- Una gasolinera tiene dos bombas, que pueden bombear cada una hasta 10,000 galones de gasolina por mes. La cantidad total de gasolina bombeada en un mes es una variable aleatoria X (expresada en diez miles de galones) con una función de densidad de probabilidad dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 2 - x, & 1 \le x < 2 \\ 0, & en\ otro\ lugar \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que la gasolinera bombee entre 8,000 y 12,000 galones en un mes.

b) Si se sabe que la gasolinera ha bombeado más de 10,000 galones en un mes en particular, encuentre la probabilidad de que haya bombeado más de 15,000 galones durante el mes.

a) $P(0.80 \le X \le 1.2) = \int_{0.8}^{1.2} f(x) = \int_{0.8}^{1.2} xdx + \int_{1}^{1.2} (2 - x)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0.8}^{x=1} \ \ \frac{-(2-x)^2}{2}\Big|$

$$= 0.18 + 0.18 = 0.36$$

b)

$$P(X>1.5 \mid X>1)=\frac{P[(X>1.5)\cap(X>1)]}{P(X>1)}=\frac{P(X>1.5)}{P(X>1)}=\frac{\int_{1.5}^{2}(2-x)dx}{\int_{1}^{2}(2-x)dx}=\frac{-\frac{(2-x)^2}{2}\Big|_{x=1.5}^{x=2}}{-\frac{(2-x)^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2}}$$

$$=\frac{0.125}{0.50}=0.25$$

c) Dada una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si\ x>0 \\ 0 & si\ x\le 0 \end{cases}$ y si la variable aleatoria continua $Y=h(x)=3X+10$ calcule: E(Y) y V (Y)

Primero se calculará

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx=-e^{-x}(x+1)\Big|_{x=0}^{x\to\infty}$$

De las propiedades del valor esperado, E(Y)= 3E(X) + 10= 3(1) + 10=13

Para la variancia primero calculamos E(X^2)

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx=\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}(x^2+2x+2)\Big|_{x=0}^{x\to\infty}=0+2=2$$

De las propiedades de la varianza tenemos $V(X)=E(X^2)-E^2(X)=4-1=3$

Finalmente $V(Y)=3^2V(X)=3^3=27$

3) El costo de reparación anual X para cierta máquina tiene una función de densidad de probabilidad, dada por

$$f(x)=\begin{cases} 3(1-x)^2, 0<x<1 \\ 0, \quad en\ otro\ lugar \end{cases}$$

Con las mediciones con las mediciones dadas en diez miles de pesos. ¿Qué cantidad de dinero debe presupuestarse anualmente para los costos de reparación, para que el costo real solamente exceda a la cantidad presupuestada un 10% de las veces?

Sea x_0 en la última igualdad de la expresión anterior, tenemos

$$x_0=1-\sqrt[3]{0.10}\ diez\ miles\ de\ pesos, esto\ es\ x_0=\$5{,}358.40$$

EJERCICIOS VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

1).- Generalmente los valores de una variable aleatoria continua se obtienen por medio de ...

2).- ¿Podrán ser negativos los valores de una variable aleatoria continua?

3).- ¿Podrán ser negativos los valores de una función de densidad?

4).- ¿Podrá decrecer la función acumulada?

5).- ¿Si la probabilidad de un evento de una variable aleatoria continua vale cero, esto implica que elevento es el vacío?

6).- La variancia de una variable aleatoria se puede entender como el valor esperado del...

7).- ¿Podrá ser negativo el valor esperado de una variable aleatoria continua?

8).- Si conoces la función acumulada de una variable aleatoria continua ¿cómo puedes encontrar sufunción de densidad?

9).-¿Es cierto que en las variables aleatorias continuas tanto la función acumulada como la de densidadno deben tener puntos de discontinuidad?

10).- La cantidad total de gasolina bombeada en un mes es una variable aleatoria X (expresada endiez miles de galones) con una función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 < x < 3 \\ 0, en\ otro\ lugar \end{cases}$$

a).- Calcule la probabilidad de que la gasolinera bombee entre 8,000 y 12,000 galones en unmes.

b).- Si se sabe que la gasolinera ha bombeado más de 20,000 galones en un mes en particular, encuentre la probabilidad de que haya bombeado más de 25,000 galones durante el mes.

11).- El costo de reparación anual X para cierta máquina tiene una función de densidad deprobabilidad, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ lugar \end{cases}$$

con las mediciones dadas en diez miles de pesos. ¿Qué cantidad de dinero debe presupuestarse anualmente en los costos de reparación, para que el costo real solamente exceda a la cantidad presupuestada un 10% de las veces?

12).- El costo de reparación anual X para cierta máquina tiene una función de densidad de probabilidad, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ lugar \end{cases}$$

con las mediciones dadas en diez miles de pesos. ¿Qué cantidad de dinero debe presupuestarse anualmente para los costos de reparación, para que el costo real solamente exceda a la cantidad presupuestada un 25% de las veces?

13).-Por medio de observaciones una persona a notado que su tiempo de espera a la llegada de su microbús (en minutos), tiene un comportamiento aproximadamente igual a la función acumulada:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{3}}, & x > 0 \end{cases}$$

14). La vida útil de cierto tipo de lavadora automática tiene una distribución con función de densidad igual a:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2e^{-0.2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

¿Cuál tiene que ser el tiempo de garantía en años que otorgue la empresa, si sólo quiere reparar un 20% de las lavadoras que venda?

15).- La elaboración de cierto proyecto está planeado a terminarse según una variable aleatoria X, la cual tendrá la siguiente función de densidad. Para el primer año se espera un resultado optimista de terminación dado por x y en caso de surgir contratiempos se tiene un comportamiento de terminación pesimista, dado por por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & 1 \leq x2 \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$$

Calcule la probabilidad de que el proyecto sea terminado en la segunda mitad del tiempo optimista.

16).- La administración de una empresa quiere calcular los costos de reparación anual de cierta máquina. Para esto lleva a cabo un estudio en el cual obtiene que los costos de reparación anual se comportan de forma proporcional a una variable aleatoria *X*, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x2 \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases}$$

con las mediciones dadas en miles de pesos.

a). Encuentra la función de distribución acumulada correspondiente.

b). Calcula el valor esperado de *X*.

c). Calcula la probabilidad de que el costo sea menor a 1000 pesos (como están en miles sería la probabilidad de que *X* sea menor que 1)

MODELOS CONTINUOS DE PROBABILIDAD

5.2 MODELO EXPONENCIAL

En una gran parte de los modelos continuos relacionados con el tiempo podemos notar que su distribución es de tal forma que en los tiempos cercanos a cero tiene una mayor acumulación y que conforme pasa el tiempo ésta decrece rápidamente de forma similar a una función exponencial negativa. Por ejemplo, en los modelos relacionados con las líneas de espera es común que en los primeros instantes el cliente tenga una mayor probabilidad de ser atendido que después de un tiempo transcurrido. Se dice que un modelo probabilístico continuo que describe apropiadamente tales fenómenos es de tipo exponencial cuando la variable aleatoria continua *X* está distribuida en el intervalo [0, ¥) de tal forma que su función de densidad de probabilidad es una función de tipo exponencial negativa.

Definición 5.6

Sea X una variable aleatoria continua del experimento realizado, diremos que tiene distribución exponencial con *parámetro positivo* β en el intervalo $[0, \infty)$, cuando su función de densidad de probabilidad (fdp) es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & x \geq 0 \end{cases}$$

Los *modelos exponenciales* tienen una gran aplicación en las Líneas de espera o Teoría de Colas, porque las distribuciones de tiempos son propicias para:

a).- Espera y llegada de clientes a un centro de servicios.

b).- Espera para ser atendidos en un banco.

c).- Espera para ser atendidos los pacientes en una clínica.

d).- En algunos otros casos en los que se estudian las duraciones de vida de componenteselectrónicos; resulta que generalmente tienen una distribución tipo exponencial.

e).- Duración de equipos industriales para poder establecer tiempos de garantías.

Los modelos exponenciales se emplean *cuando la probabilidad de que la variable aleatoria en estudio que ocurre en una unidad de tiempo sea igual a que suceda en cualquier otra*. Lo anterior significa que las variables aleatorias exponenciales son invariantes en el tiempo.

Teorema 5.1

Teorema 5.1

Si X es una variable aleatoria continúa distribuida exponencialmente en $[0,\infty)$ y, f (x) su función de densidad de probabilidad, entonces

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & en\ otro\ lugar \end{cases}$$

Cálculos

$P(X > A) = e^{-\frac{a}{\beta}}$ $\quad P(X < a) = 1 - e^{-\frac{a}{\beta}}$ $\quad P(a < X < B) = e^{-\frac{a}{\beta}} - e^{-\frac{b}{\beta}}, con\ b > a > 0$

EJEMPLOS 5.3

1.- El tiempo de espera de los clientes en un restaurante para ser atendido es una variable aleatoria continua *X* con distribución exponencial y media m = 5 minutos.

a).- Calcula la probabilidad, de que la siguiente persona que entre al restaurante sea atendida despuésde 6 minutos.

b).- Si se sabe que Pablo fue atendido después de 4 minutos, calcula la probabilidad, de que haya sidoatendido después de 6 minutos.

c).- Calcula la probabilidad de que Pablo sea atendido después de 2 minutos. Compara el resultado,con el obtenido en el inciso b).

Como *X* está distribuida exponencialmente con parámetro b = 5 tendremos.

a) Por el teorema anterior $P(X > 6) = e^{-\frac{6}{5}}$.

b) Por el Teorema anterior y la probabilidad condicional, tenemos:

$$P(X > 6 \,|X > 4) = \frac{P[(X > 6) \cap (X > 4)]}{P(X > 4)} = \frac{P(X > 6)}{P(X > 4)} = \frac{e^{-\frac{6}{5}}}{e^{-\frac{4}{5}}} = e^{-\frac{2}{5}}$$

c) Por el Teorema anterior: $P(X > 2) = e^{-\frac{2}{5}}$, esta probabilidad coincide con la del inciso b.

OBSERVACIÓN

El resultado del inciso b) se puede generalizar, y nos muestra (al igual que se hizo con el modelo geométrico) que la distribución exponencial no tiene memoria. Es decir: Para cualesquier a y b, se cumple: $P(X > a + b \mid X > a) = P(X > b)$. Esto último quiere decir que si comparamos las probabilidades de duración de un componente usado, el cual tiene una distribución exponencial. La probabilidad de que opere por lo menos t unidades de tiempo adicionales debe ser igual a la probabilidad cuando un componente nuevo de tal tipo opere al menos la misma t unidad de tiempo que el viejo.

2.- Una lavadora MABE tiene una vida media de 10 años. Si la vida útil de ese tipo de motor puede considerarse como una variable aleatoria distribuida en forma exponencial. ¿Cuál debe ser el tiempo de garantía que deben tener dichas lavadoras si se desea que no más del 20 % de éstas fallen antes de que expire su garantía?.

Primeramente vamos a definir a la variable aleatoria con distribución exponencial X

X: "Tiempo de vida de las lavadoras Mabe".

Sea T el tiempo de garantía de las lavadoras. Por otro lado, para que una lavadora sea reparada durante su tiempo de garantía, es necesario que $P(X < T) = 0.20$. Si además tomamos en cuenta que $b = 10$, tendremos:

De donde, $0.20 = P(X < T) = 1 - e$, la probabilidad de que la lavadora dure menos que el tiempo de garantía.

Despejando la exponencial, resulta:

Por medio del logaritmo natural:

Finalmente: $T = -10 \ln(0.80) = 2.23$ años.

EJERCICIOS 1

1).- Se ha hecho un estudio sobre el tiempo de espera de los usuarios a cierto banco del D.F., obteniéndose que el tiempo promedio que tardan en atender a un usuario entre las 9 y las 12 horas de un día normal es de 10 minutos, y que el tiempo de espera en ser atendido se distribuye exponencialmente. Calcula la probabilidad de que si vas a dicho banco en un día normal a las 10:20 horas seas atendido

a).- En menos de 5 minutos.

b).- En más de 10 minutos.

2).- El periodo de vida en años de un interruptor eléctrico tiene una distribución exponencial con un promedio de falla de $m = 2$ años. ¿Cuál es la probabilidad de que un interruptor falle despuésdel 2do. año?

3).- Un motor eléctrico tiene una vida media de 6 años. Si la vida útil de ese tipo de motor puede considerarse como una variable aleatoria distribuida en forma exponencial. ¿Cuál debe ser el tiempo de garantía que debe tener el motor si se desea que a lo más el 15 % de los motores fallen antes de que expire su garantía?.

4).- Por medio de una repetición de experimentos se obtuvo que la variable aleatoria continua X se describe en forma muy propicia por un modelo de tipo exponencial, y para determinar su parámetrocorrespondiente se ha empleado su función de distribución acumulada, resultando que la Probabilidad $P(X < 35) = 0.26$. Encuentre en tales circunstancias al parámetro b.

5.4 MODELO NORMAL

La distribución normal fue encontrada por Carl Friedrich Gauss , en algunos[5] trabajos se le conoce como: "Ley de probabilidad de Gauss", según ésta una magnitud sufre la influencia de numerosas causas de variación, todas ellas muy pequeñas e independientes entre sí, los resultados se acumulan alrededor de la media, distribuyéndola simétricamente a su alrededor con una frecuencia que disminuyerápidamente al alejarse del centro.

Definición 5.7

Sea X una variable aleatoria continua se dice que X tiene una distribución normal o de Gauss, con parámetros y (positivo) en todos los reales cuando su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} en\ x\epsilon(-\infty, \infty)$$

Como se mencionó arriba los modelos con distribución normal se caracterizan por la forma de la gráfica de su función de densidad. La gráfica de la distribución Normal tiene forma de campana, como la mostrada en la siguiente figura:

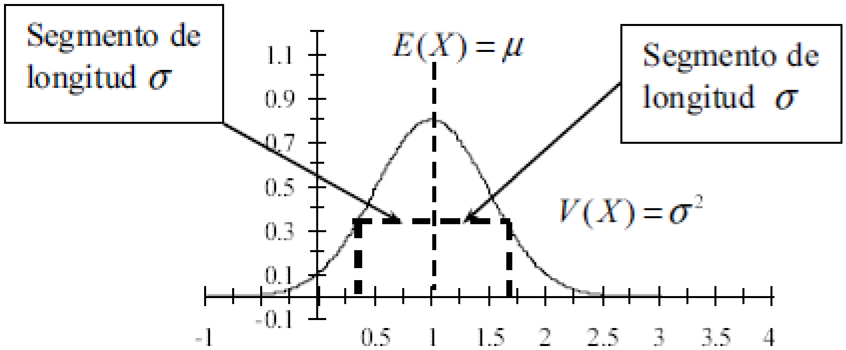


Fig. 5.2 Gráfica de la fdp, de una variable aleatoria continua *X*,con distribución normal, media m y variancia s ^{2} .

En la gráfica anterior, se puede apreciar que la recta es el eje de simetría de la función; mientras que en los valores y se tienen los puntos de inflexión de la gráfica de la función ¡compruebe esto último por medio del Cálculo!

El modelo normal tiene gran aplicación en diferentes áreas y es una de las distribuciones conmayor auge en el estudio de las probabilidades y la estadística, la dimensión de su importancia radica en un Teorema titulado: "*Teorema del Límite Central*".

5.4.1. CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Como se mencionó anteriormente la distribución de Gauss tiene una gran importancia en el estudio de las probabilidades y la estadística, por consiguiente, es de gran importancia tener un análisis detallado sobre su comportamiento para el cálculo de probabilidades. Pero de los cursos de Cálculo, se sabe que la integral de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

no se puede resolver en base a funciones elementales. Por lo tanto, cuando la integral es definida sólopodemos aproximar sus valores por medio de alguno de los métodos numéricos, entre algunos otros tenemos: *Método del trapecio*, *Simpson* 1/3 y Cuadratura de Gauss.

De lo anterior, podemos notar que el cálculo de probabilidades resultaría bastante engorroso para este tipo de distribuciones, pero debido a su importancia se tienen tablas y programas para calcular las probabilidades. Desde luego, como es de suponerse se requiere de algún método, con el que no se tenga que resolver integrales para diferentes valores de ? y ?.

El problema anterior se resuelve con el cambio de variable aleatoria:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

al cual se le llama: *“ La estandarización de la variable X a unidad en Z”*

La fórmula en *Z* es *una regla de transformación* puesto que en la estandarización X ⍰⍰, representa un desplazamiento del eje de las ordenadas ver Figura 5.3; mientras que la división entre ladesviación estándar influye en la amplitud de la función, ver figura 5.4.

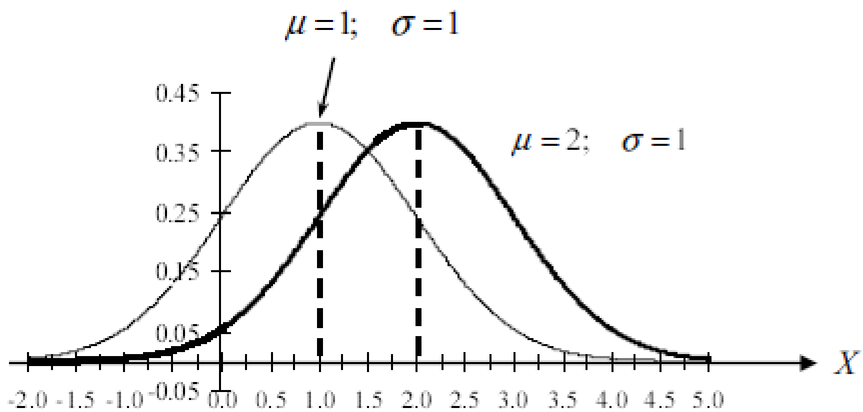


Fig. 5.3 Muestra la gráficas de la distribución normal con la misma desviación estándar, pero diferente valor esperado.

Se puede apreciar que las dos gráficas son iguales, sólo cambia la posición del eje de las ordenadas. En las gráficas de abajo cambiará su amplitud, a mayor variancia menor amplitud.

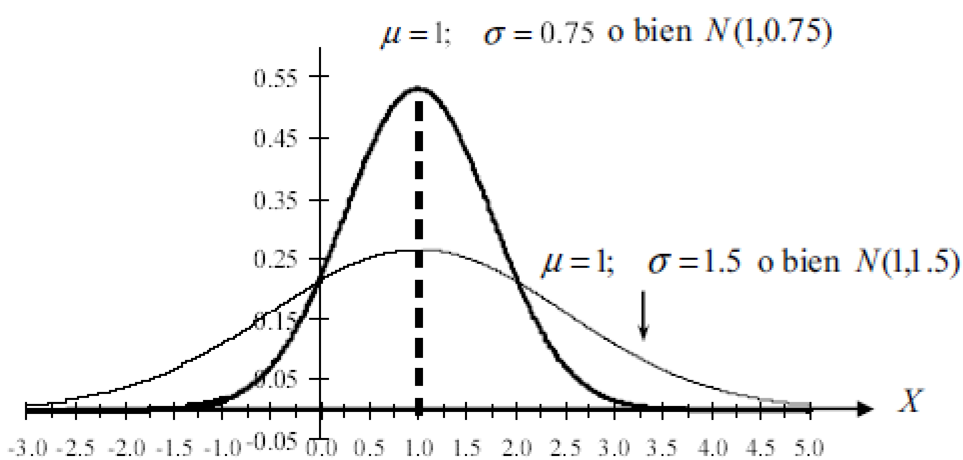


Fig. 5.4 Muestra la gráfica de la distribución normal con el mismovalor esperado, pero diferente desviación estándar.

Cuando se realiza la estandarización resulta que E(Z) = y V(Z) = 1.

y su gráfica se representa en la Figura 5.5.

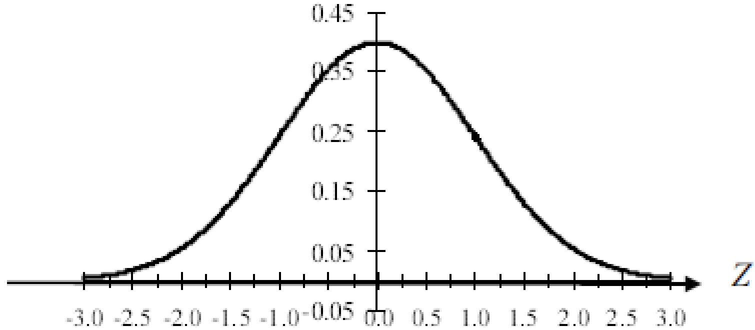


Fig. 7.5 Gráfica de la distribución normal estándar.

La integral para la función acumulada de la variable aleatoria Z, es decir la distribución normalen su forma estándar se calcula y representará por:

$$F(z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(z_0)$$

Para el cálculo de probabilidades se emplean las propiedades siguientes de la distribución y latabla de la normal estándar.

5.4.2 PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

a) Propiedad de simetría. La función *f(z)* es simétrica con respecto al eje de las ordenadas. Es decir. $P(Z \le -Z_0) = P(Z \ge Z_0)$

b) Propiedad del complemento. En los casos de $P(Z \ge Z)$ se puede emplear la simetría, inciso a, o el complemento. Es decir, $P(Z \ge Z) = 1 - P(Z \le Z)$.

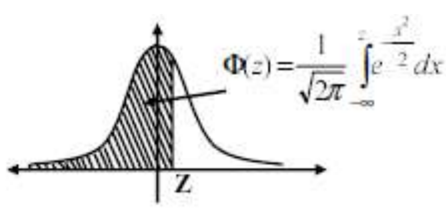
c) $P(-1 \le Z \le 1) = 0.6827$ y $P(-2 \le Z \le 2) = 0.9545$

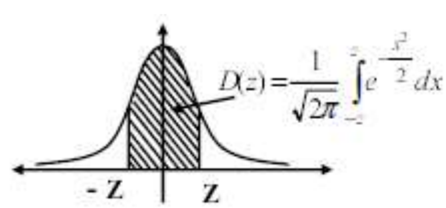
d) La suma de probabilidades fuera del intervalo (-4, 4) , no puede ser mayor a 0.0001, es decir, casi vale cero.

5.4.2 USO DE TABLAS DE LA FUNCIÓN ACUMULADA

Como se ha mencionado el uso de tablas o de algún programa para el cálculo de probabilidades es fundamental en la solución de los ejercicios. Por lo tanto, para homogeneizar el uso de tablas que emplearemos en los cálculos.

Función acumulada de la Distribución Normal Estándar





z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	$D(z)$
0.04	0.4840	0.5160	0.0319	**0.44**	0.3300	0.6700	0.3401	**0.84**	0.2005	0.7995	0.5991	**1.24**	0.1075	0.8925	0.7850
0.05	0.4801	0.5199	0.0399	**0.45**	0.3264	0.6736	0.3473	**0.85**	0.1977	0.8023	0.6047	**1.25**	0.1056	0.8944	0.7887
0.06	0.4761	0.5239	0.0478	**0.46**	0.3228	0.6772	0.3545	**0.86**	0.1949	0.8051	0.6102	**1.26**	0.1038	0.8962	0.7923

Como se puede observar en estas tablas la *función acumulada* se representa por medio de la función medio.
Para el cálculo de probabilidades en intervalos simétricos se tiene otra función:

$$D(z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z_0}^{z_0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(z_0) - \Phi(-z_0)$$

Por lo tanto el cálculo de probabilidades en base a estas funciones y las propiedades anteriores, sepodrá efectuar de la siguiente forma:

1) $P(Z < Z_0) = \Phi(Z_0)$

2) $P(Z > Z_0) = P(Z < -Z_0) = \Phi(-Z_0 3) \quad P(-Z_0 < Z < Z_0) = D(Z_0)$

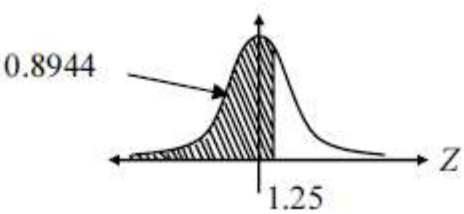
4) $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

En los siguientes ejemplos emplearemos ambas funciones

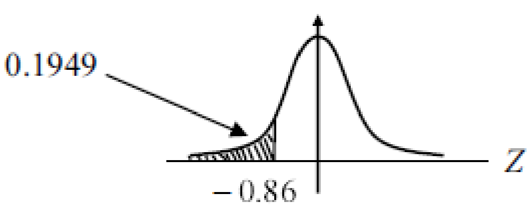
EJEMPLOS 5.4

Sea Z una variable aleatoria continua con distribución normal estándar, calcula las probabilidades indicadas:

1) $P(Z < 1.25) = \Phi(1.25) = 0.8944$

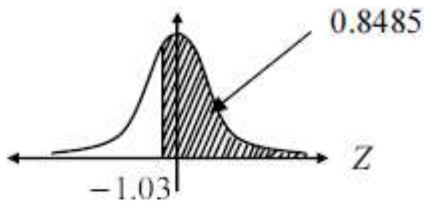


2) $P(Z < -0.86) = \Phi(-0.86) = 0.1949$

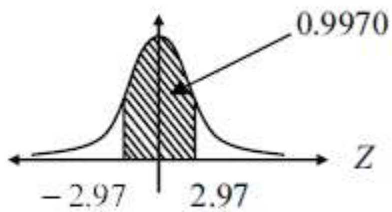


3) $P(Z > -1.03) = 1 - P(Z \leq -1.03) =$

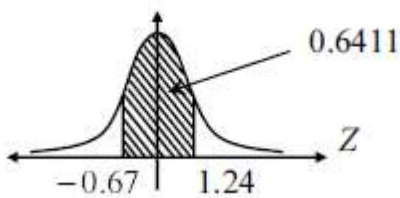
$$= 1 - \Phi(-1.03) =$$
$$= 1 - 0.1515 = 0.8485, o$$
$$P(Z > -1.03) = P(Z < 1.03) = \Phi(1.03) = 0.8485$$



4) $P(-2.97 < Z < 2.97) = D(2.97) = 0.9970$



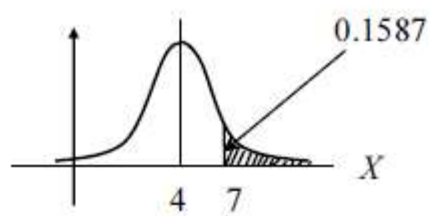
5) $P(-0.57 < Z < 0.57) = D(0.57) = 0.4313$
6) $P(-0.67) < Z < 1.24) = \Phi(1.24) - \Phi(-0.67) = 0.8925 - 0.2514 = 0.6411$



7) $P(0.06 < Z < 3.04) = \Phi(3.04) - \Phi(0.06) = 0.9988 - 0.5239 = 0.4749$
8) $P(Z < -4.5) = \Phi(-4.5) \approx 0$
9) $P(Z < 5) = \Phi(5) \approx 1$
10) $P(0.06 < Z < 5.1) = \Phi(5.1) - \Phi(0.06) \approx 1 - 0.5239 = 0.4761$

Sea X una variable aleatoria continua con distribución normal, calcula las probabilidadesindicadas:
11) Si $E(X)$=4 y $V(X) = 9$; calcule la probabilidad $P(X$ ⍰ $7)$.

$$P(X \geq 7) = P\left(\frac{X-4}{\sqrt{9}} \geq \frac{7-4}{3}\right)$$
$$= P(Z \geq 1) = P(Z \leq -1)$$
$$= \Phi(-1)$$
$$= 0.1587$$



12) Si $E(X)=4$ y $V(X)=9$; calcule la probabilidad $P(X$ ⍰ $7)$.

Para esto, primero realizamos la estandarización de la variable X, y después empleamos las tablasde la distribución normal estándar.

$$P(-1 < X < 5) = P\left(\frac{-1-3}{2.5} < \frac{X-3}{2.5} < \frac{5-3}{2.5}\right) = P(-1.6 < Z < 0.8) = \Phi(0.8) - \Phi(-1.6)$$
$$= 0.7881 - 0.0548 = 0.7333$$

13) El peso de los estudiantes hombres de la UPIICSA se distribuye normalmente con un valor promedio de 70.5 kg y una variancia de 5.3. Si los estudiantes que pesen más de 85 kg. Serán convocados para formar parte del equipo de Fut-bol americano que representará a la escuela, determine el porcentaje de alumnos que podrán ser convocados.

Sea la variable aleatoria X: "peso de los estudiantes hombres de la UPIICSA".

$$P(X > 85) = P\left(\frac{X-70.5}{5.3} > \frac{85-70.5}{5.3}\right) = P(Z > 2.74) = \Phi(-2{,}74) = 0.0031 = 0.31\%$$

14) Supóngase que X, representa la resistencia a la ruptura de una cuerda, con un promedio de 100 y una desviación estándar de 4. Cada alambre para cuerda produce una utilidad de \$25, si x ⍰ 95

En caso contrario la cuerda se tiene que utilizar con otro propósito diferente y se obtiene una utilidad de \$10 por alambre. Encuentra la utilidad esperada por alambre.

Primero calcularemos las probabilidades:

$$P(X > 95) = P\left(\frac{X-100}{4} > \frac{95-100}{4}\right) = P(Z > -1.25) = 0.8944, y$$
$$P(X \leq 95) = 1 - P(X > 95) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

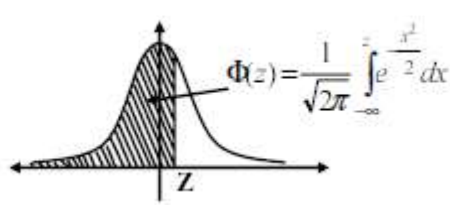
El valor esperado estará dado por

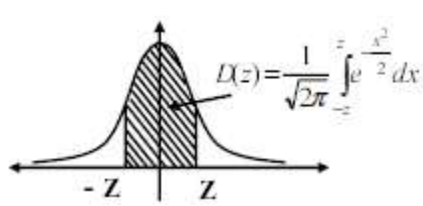
$$ganancia\ esperada = P(X > 95) \times 25 + P(X \leq 95) \times 10 =$$
$$= 0.8944 \times 25 + 0.1056 \times 10 = \$23.416$$

5.4.2 USO DE TABLAS PORCENTUALES

Con frecuencia al resolver problemas se deben de hacer conclusiones con respecto a la variable aleatoria en estudio. Para tal efecto, es común tener que encontrar los valores de la variable con los cuales se obtienen las probabilidades establecidas (pueden estar dadas en porcentajes). En lo que concierne a las variables aleatorias con distribución normal, se emplean otras tablas, llamadas: "Tablas Porcentuales de la Distribución Normal", y que tienen el siguiente aspecto.

TABLA PORCENTUAL DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR



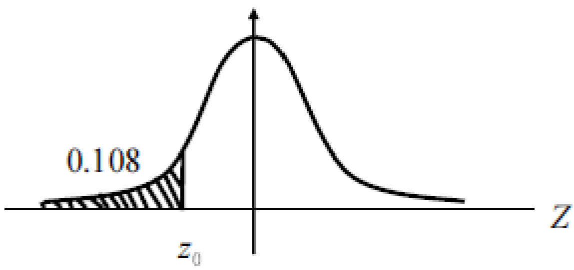


%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)	%	z(Φ)	z(D)

0.6	-2.512	0.008	5.6	-1.589	0.070	10.6	-1.248	0.133	15.6	-1.011	0.197	20.6	-0.820	0.261	25.6	-0.656	0.327
0.7	-2.457	0.009	5.7	-1.580	0.071	10.7	-1.243	0.135	15.7	-1.007	0.198	20.7	-0.817	0.262	25.7	-0.653	0.328
0.8	-2.409	0.010	5.8	-1.572	0.073	10.8	-1.237	0.136	15.8	-1.003	0.199	20.8	-0.813	0.264	25.8	-0.650	0.329
0.9	-2.366	0.011	5.9	-1.563	0.074	10.9	-1.232	0.137	15.9	-0.999	0.201	20.9	-0.810	0.265	25.9	-0.646	0.331

EJEMPLOS 5.5

1).- Encontrar el valor de z_0, tal que $P(Z \leq z_0) = 0.108$.



La probabilidad que se nos indica es igual al 10.8%; por lo tanto, buscando en las tablasporcentuales el 10.8%, tenemos:

$$z_0 = Z(\Phi) = -1.237; esto\ es: P(Z < -1.237) = 0.108$$

2).- Encontrar el valor de z_0, tal que $P(Z \geq z_0) = 5\%$.

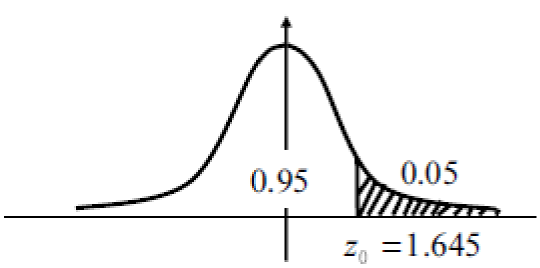
Como las tablas porcentuales nos muestran los valores para la función acumulada de menos infinito hasta el valor indicado, tenemos que emplear la propiedad del complemento; es decir

$P(Z \geq z_0) = 1 - P(Z \leq z_0) = 5\%$; de donde, necesitamos $P(Z \leq z_0) = 95\%$.

$$z_0 = Z(\Phi) = 1.645, \text{ esto es: } P(Z \geq 1.645) = 0.05.$$

Este ejercicio también se puede resolver empleando la propiedad de simetría:

$$P(Z \geq z_0) = P(Z \leq -z_0) = 5\%, donde - z_0 = -1.645. Es\ decir\ z_0 = 1.645$$

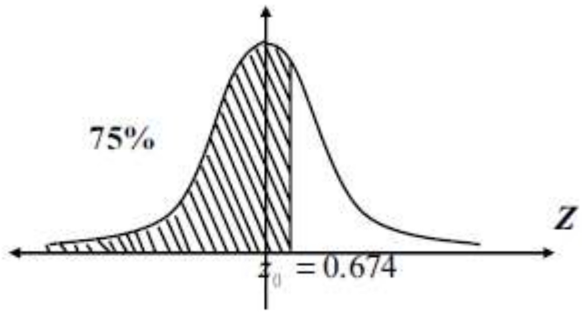


3).- Si $E(X) = 4$ y $V(X) = 9$; calcular el valor de x_0 tal que $P(X \leq x_0) = 75\%$.

Para esto, primero realizamos la estandarización, y después empleamos las tablas Porcentuales de la distribución normal estándar.

$$P(X \leq x_0) = P\left(\frac{X-4}{3} \leq \frac{x_0-4}{3}\right) = P(Z \leq Z_0) = 75\%, tenemos\ z_0 = 0.674; por\ otro\ lado:$$

$$z_0 = \frac{x_0 - 4}{3}$$
$$despejando\ x_0, tenemos: x_0 = 4 + 3z_0 = 4 + 3(0.674) = 6.022$$
$$P(X \leq 6.022) = P(Z \leq 0.674) = 75\%$$



4) La variable aleatoria X representa la vida promedio de cierto aparato electrónico, tiene una distribución aproximadamente normal, con media m = 3.5 años y desviación estándar s =1.5 años. Si el fabricante de dichos aparatos desea reparar en el periodo de garantía, solamente el 10% deestos. Determinar cuál tendría que ser el periodo de garantía.

Como X representa a la vida promedio de los aparatos, y el 10% a la probabilidad de que el aparato dure menos que el período establecido,

$$P(X \leq x_0) = P\left(\frac{X - 3.5}{1.5} \leq \frac{x_0 - 3.5}{1.5}\right) = P(Z \leq z_0) = 0.10$$

$$en\ donde, z_0 = \frac{x_0 - 3.5}{1.5}$$

Por tanto, despejando x0, tenemos x0=3.5+1.5z0

De las tablas porcentules de la tribución normal estándar, resulta z0=-.282

Finalmente el periodo de garantía x0=3.5+1.5(-1.282)=1.577 años

EJERCICIOS 2

1).- El diámetro de los pernos de una fábrica tiene una distribución normal con una media de 950milímetros y una desviación estándar de 10 milímetros.

a).- ¿Cuál es la probabilidad de que un perno escogido al azar tenga un diámetro entre 947 y 958 milímetros?

b).- ¿Cuál es el valor apropiado de c tal que un perno escogido al azar tenga un diámetro menorque c con una probabilidad del 0.90?

2).- Se supone que los resultados de un examen tienen una distribución normal con una media de78 y una variancia de 36.

a).- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que presenta un examen obtenga una calificaciónmayor a 72?

b).- ¿Cuál debe ser la mínima calificación aprobatoria si el examinador pretende que solamente el28% de los estudiantes apruebe?

3).- Los pesos de un número grande de perros de lana miniatura están distribuidos aproximadamente en forma normal con una media de 8 kilogramos y una desviación estándar de 0.9 kilogramos. Encuentre la fracción de estos perros de lana con pesos,

a).- arriba de 9.5 kilogramos;

b).- cuando mucho 8.6 kilogramos;

c).- entre 7.3 y 9.1 kilogramos inclusive.

4).- Una fábrica produce pistones cuyos diámetros se encuentran distribuidos en forma normal con un diámetro promedio de 5 cm y una desviación estándar de 0.001 cm. Para que un pistón sea útil,su diámetro debe encontrarse entre 4.998 y 5.002 cm. Si el diámetro del pistón es menor de 4.998; éste se desecha, y si él es mayor de 5.002 se puede reprocesar. Si en la fábrica se producen mensualmente 20,000 pistones:

a).- ¿Cuántos pistones serán útiles?

b).- ¿Cuántos pistones serán desechados?

c) ¿Cuántos pistones necesitan ser reprocesados?

5).- La administración de una empresa quiere calcular los costos de reparación anual de cierta máquina. Para esto lleva a cabo un estudio en el cual obtiene que los costos de reparación anual se comportan de forma normal con media de $400,000 y desviación estándar de $50,000

a). Calcula la probabilidad de que los costos de reparación para este año estén entre $300,000 y $500,000.

b). Abajo de que costo anual se encuentra el presupuesto para la reparación anual de las máquinasen el 10% de los casos.

6).- El peso de los estudiantes hombres de la UPIICSA se distribuye normalmente con un valor promedio de 73.5 kg y una variancia de 4.3. Si los estudiantes que pesen más de 85 kg. serán convocados para formar parte del equipo de Fut-bol americano que representará a la escuela, determine el porcentaje de alumnos que podrán ser convocados.

EJERCICIOS MODELOS CONTINUOS

1).- ¿Cómo son las variables aleatorias con distribución exponencial, con respecto del tiempo?.

2).- Si X es una variable con distribución normal, describe a su función de densidad de probabilidad.

3).- Sea Z una variable de un modelo normal estándar, calcula (sin usar tablas ni calculadora) con 4dígitos exactos:

$P(Z > 7.23)$.

$P(Z$ £ -3p)

$P(-8 < Z < 8)$

$P(0 < Z < 12.79)$.

4) ¿Qué distribución continua es invariante en el tiempo, es decir no tiene memoria?.

5).-¿Qué valores puede tomar el rango de una variable aleatoria con distribución exponencial?.

6).- Los administradores de cierta industria han notado que su producto tiene un tiempo de duraciónque puede considerarse una variable aleatoria con distribución exponencial con una vida media de 5años.

a).- ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un articulo de dicha producción dure más de 10 años?.

b).- ¿Si el tiempo de garantía asignado por los administradores es de 2 años, qué porcentaje de sus productos tendrá que reparar la industria durante el periodo de garantía?.

7).- El periodo de vida en años de un interruptor eléctrico tiene una distribución exponencial con un promedio de falla de m = 2 años. ¿Cuál es la probabilidad de que un interruptor falle después del3er. año?

8).- Las televisiones de cierta marca tienen una vida media de 12 años. Si la vida útil de ese tipo detelevisiones puede considerarse como una variable aleatoria distribuida en forma exponencial.
¿Cuál debe ser el tiempo de garantía que otorgará el fabricante, si desea reparar, por garantía, a lomás el 20 % de los televisores?.

9).- Suponga que el tiempo promedio que tardan en atenderlo en una oficina de la tesorería es de 10 minutos, y que ese tiempo de espera en ser atendido se distribuye exponencialmente. Calcule la probabilidad de que su tiempo de espera sea:

a).- Mayor de 10 minutos.

b).- De 5 a 10 minutos.

10).- El tiempo entre llegadas a la oficina de Hacienda es exponencial con valor medio de 0.05 horas.
La oficina abre a las 8:00 horas.

a).- Encuentra la función de densidad para la variable exponencial que describe el tiempo entrellegadas.

b).- Encuentre la probabilidad de que no llegue ningún cliente antes de las 8:10 horas.

c).- Si son ahora las 8:50 horas y el último cliente entró en las oficinas a las 8:40 horas, ¿cuál es laprobabilidad de que el siguiente cliente llegué antes de las 9:00 horas?

11).- Una empresa metalúrgica produce rodamientos con un diámetro que tiene una desviación normal, con media 3.0005 pulgadas y desviación estándar de 0.0010 pulgadas. Las especificaciones requieren que los diámetros estén en el intervalo 3.000 ± 0.0020 pulgadas. Si los cojinetes cuyos diámetros quedan fuera de ese intervalo se rechazan, ¿qué fracción de la producción total será rechazada?

12).- El liquido despachado por una máquina de refrescos está distribuido normalmente, con una media de 230 mililitros y una desviación estándar de 10 mililitros. Calcule la probabilidad de que el siguiente vaso despachado tenga más de 250 mililitros.

13).- Los tornillos producidos por una máquina tienen un diámetro con distribución normal, y cuya desviación estándar es de 0.01mm. Si los tornillos se distribuyen en cajas con 200 tornillos cada una, ¿cuál es la probabilidad de que en menos de 3 cajas de 8 seleccionadas al azar se encuentren menos de 10 tornillos defectuosos?. Considerando a los tornillos defectuosos, aquellos cuyodiámetro se desvía de su media en más de 0.025 mm. Además se consideran a las cajas independientes.

14).- Ciertos tipos de baterías para automóvil tienen un tiempo de vida normalmente distribuido con media 1,200 días y desviación estándar igual a 100 días. ¿Por cuánto tiempo se deben garantizar las baterías si el fabricante quiere reemplazar sólo el 10 por ciento de las baterías vendidas?

15).- Se supone que los resultados de los exámenes de Introducción a la administración en la universidad, tienen una distribución aproximadamente normal con $m = 7.2$ puntos y variancia de 1.8 puntos. ¿Cuántos de los 480 alumnos que van a presentar el examen de esta asignatura obtendrán una calificación menor a 6?

16).- El diámetro de un cable eléctrico está distribuido normalmente con promedio 0.8 y variancia0.0004. Un cable se considera defectuoso si el diámetro se diferencia de su promedio en más de 0.025. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un cable bueno?

17).- Se observo durante un largo periodo que la cantidad semanal gastada en el mantenimiento y en las reparaciones de cierta fábrica tiene aproximadamente una distribución normal con $m = \$400$ y $s = \$20$. ¿De cuánto tendría que ser el presupuesto para reparaciones semanales y mantenimiento, para que la cantidad presupuestada solamente sea rebasada con una probabilidad de 0.1?

18).- Cierto proceso de manufactura produce pernos que deben tener un diámetro entre 1.2 y 1.25 pulgadas. Se sabe que el diámetro se distribuye normalmente con $m = 1.21$ y $s = 0.02$. ¿Qué porcentaje de los pernos está fuera de éstas especificaciones?

19).- Para seleccionar a sus empleados un ejecutivo industrial usa una prueba que tiene una puntuación promedio y una desviación estándar, $s = 10$. Suponga que la distribución de las puntuaciones es normal; y que una puntuación mínima de 65 le permita al solicitante seguir siendo considerado. ¿Cuál debe ser el valor de , si se quiere que aproximadamente el 2.5 % de los solicitantes sigan siendo considerados en esta prueba?

20).- Una compañía paga a sus empleados un salario promedio de \$5.25 pesos por hora con una desviación estándar de 50 centavos. Si los salarios tienen aproximadamente una distribución normal.

a).- ¿Qué porcentaje de los trabajadores recibe salario entre 4.75 y 5.69 pesos por hora inclusive?

b).- ¿Mayor de que cantidad es el 5 % de los salarios más altos?

6.1 Errores comunes en procesos estadísticos y como evitarlos

6.1.1 Errores

Al llevar a cabo procesos estadísticos es muy común cometer errores. Estos errores pueden presentarse en cualquier etapa del proceso. A continuación, se presentan los más comunes:

- Utilizar la misma información tanto para formular una hipótesis como para probarla
- Tomar muestras de la población equivocada
- No tomar muestras representativas
- Medir las variables equivocadas
- Usar métodos estadísticos equivocados o no apropiados
- No validar correctamente los modelos
- Dejar que el modelo estadístico tome las decisiones

6.1.2 Como evitar los errores más comunes

Es posible evitar los errores más comunes o disminuir su impacto en los resultados obtenidos en el proceso estadístico. A continuación, se enlista algunas acciones que pueden llevarse a cabo durante el proceso para evitarlos:

- Establezca sus objetivos y el uso que planea hacer de su investigación antes de llevar a cabo un experimento de laboratorio, un ensayo clínico o una encuesta y antes de analizar un conjunto de datos existente.

- Defina la población a la cual aplicara los resultados de su análisis.

- Enumere todas las posibles fuentes de variación. Contrólelos o mídalos para evitar que se confundan con las relaciones entre los elementos que son de interés primario.

- Formule su hipótesis y todas las alternativas asociadas. Enumere los posibles hallazgos experimentales junto con las conclusiones que sacaría y las acciones que tomaría si este u otro resultado resultara ser el caso. Haga todas estas cosas antes de completar un solo formulario de recopilación de datos y antes de encender su computadora.

- Describa en detalle cómo pretende extraer una muestra representativa de la población.

- Use estimadores que sean imparciales, consistentes, eficientes y robustos y que impliquen una pérdida mínima. Para mejorar los resultados, concéntrese en estadísticas suficientes, estadísticas fundamentales y estadísticas de admisibilidad, y utilice estimaciones de intervalos.

- Conozca las suposiciones que subyacen a las pruebas que usa. Utilice aquellas pruebas que requieren el mínimo de suposiciones y son más poderosas contra las alternativas de interés.

- Incorpore en sus informes los detalles completos de cómo se extrajo la muestra y describa la población de la que se extrajo. Si faltan datos o no se ha seguido el plan de muestreo, explique por qué y enumere todas las diferencias entre los datos presentes en la muestra y los datos que faltaban o estaban excluidos.

CONCLUSIONES

La nueva guía:

- Es más concisa respecto a sus versiones anteriores.
- Facilita el aprendizaje, a través de explicación, definición y ejemplo.
- Cuenta con problemas actualizados.
- Tiene mejoras en la redacción y presentación.
- Muestra resoluciones de ejercicios prácticos.

Reflexión

El curso propedéutico de probabilidad nos permitió crear un criterio analítico en diversos aspectos de nuestra vida, cosas del día a día tienen más influencia de la que creíamos, al igual que la estadística son importantes para entender el entorno que nos rodea y tomar mejores decisiones, el entender el porqué de las cosas. Los conocimientos más importantes que para algunos pueden ser sencillos, pero tienen un grado de complejidad son: conocer los productos que integran la canasta básica mexicana, las funciones de las dependencias de gobierno como Procuraduría Federal del Consumidor (PROFECO), Secretaría de Economía (SE), las nuevas normas en alimentos, la diferencia entre efectividad y eficacia de una vacuna, la importancia de un buen empaque, como funcionan los ejercicios democráticos, diversos índices para cuantificar fenómenos como el de inflación y el de precios al consumidor.

El profesor logró un buen trabajo en el desarrollo de nuestra alfabetización estadística.

Bibliografía

- Gutiérrez, Eduardo. (2005)
Guía para el examen de admisión a la maestría de Administración, Probabilidad
Ciudad de México, México

- Good, Phillip I. & Hardin, James W. (2003)
Common errors in statistics (and how to avoid them)
New Jersey, USA: Wiley-Interscience

- eKuatio, Como solucionar ejercicios y problemas de probabilidad paso a paso, 2022
▷ Ejercicios y problemas resueltos de probabilidad paso a paso (ekuatio.com)

- Como se calculó la efectividad de las vacuna covid, 2021
https://youtu.be/JAuwb9UsQ7g

- Probabilidad geométrica
probabilidad geometrica (narkive.com)

- Probabilidad de eventos, 2022
Probabilidad del evento - Minitab

- Diferentes enfoques de probabilidad, 2013
https://youtu.be/3Ag5iBDWW7g

Ejemplo examen de Probabilidad

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONALUPIICSA.

MAESTRÍA EN ADMINISTRACIÓN EXAMEN PARA ADMISIÓN 2022: ASIGNATURA: PROBABILIDAD v.1

NOMBRE DEL ASPIRANTE____

CARRERA DE PROCEDENCIA____

ESCUELA DE PROCEDENCIA____

TITULADO?____________________CÉDULA PROFESIONAL:______________________________________

INSTRUCCIONES. Revise cuidadosamente las preguntas y responda con claridad lo Que se le cuestiona.Este examen es de 2:45 horas. Uso de calculadora está permitido, también formulario **Para aprobar debe contestar correctamente 20 / 30 puntos. El examen se regresará contestado al correo hurtadoupiicsa@yahoo.com en pdf, junto con las hojas de operaciones que haga y su identificación escaneada en anverso y reverso. Todas las respuestas se colocan en esta hoja, independientemente que lo haga en sus hojas de operaciones.**

Al devolver, en asunto colocará primero: Examen de ingreso de Probabilidad, después su apellido y combre completo

Puede usar tablas, calculadora

TEORÍA: I.- Relación de columnas:

MODELOS DETERMINÍSTICOS Y PROBABILÍSTICOS

Definiciones. Relación de columnas. Coloque el número correcto en el paréntesis valor: 5 puntos

1.- Modelo determinístico	Cuando se realiza el modelo matemático de un fenómeno yen él se pueden manejar los factores que intervienen en suestudio con el propósito de predecir sus resultados ( )
2.- Modelo estocástico	Es una representación simbólica de un fenómeno cualquiera, realizada con el fin de estudiarlo mejor. Por ejemplo: fenómenos físicos, económicos, sociales, etc.( )
3.- Experimento probabilístico	Al proceso por el cual se describen los resultados que no se conocen y no se pueden predecir ( )
4.- Espacio muestral	Al conjunto de todos los resultados posibles de unexperimento probabilístico lo llamaremos “Espacio Muestral del experimento” y lo denotaremos por S.( )
5.- Modelo matemático	A los modelos matemáticos de los fenómenos en los cualesno se pueden controlar los factores que intervienen en su estudio, y además dichos factores ocurrende manera tal que no es posible predecir sus resultados ( )

II DEFINICIONES valor: 5 puntos

1.- Corriente frecuentista	
2.-Corriente clásica	
3.- Corriente subjetiva	
4.- Corriente bayesiana	
5.- Evento	

III. PROBLEMAS VALOR: 20 PUNTOS (Cada problema vale 2 puntos)

TÉCNICAS DE CONTEO Y PROBABILIDAD

Problemas:

1.- ¿Cuántos números diferentes de placas se pueden formar con los números dígitos y las letras del alfabeto, si cada número de placa consta de 3 letras y 3 dígitos? Se permite la repetición R _

2.- ¿Cuántos números diferentes de placas se pueden formar con los números dígitos y las letras del alfabeto, si cada número de placa consta de 3 letras y 3 dígitos? Supóngase que no se permite la repetición. R = _______________

3.- Se tiene 4 computadoras "HP" de aspecto semejante, 3 computadoras "Samsung" también de aspecto semejante y 3 computadoras "Hitachi" igualmente de aspecto semejante, ¿en cuántas maneras diferentes se pueden ordenar en línea recta todas las computadoras? R= ______

4.- Una prueba de falso y verdadero está formada de 14 preguntas de las cuales 8 son verdaderas y las Demás falsas ¿cuántos arreglos de 14 respuestas se pueden dar, si se contestan todas las preguntas? R= ______________

5.- En una fábrica se distribuyen 15 aparatos electrónicos en tres líneas diferentes, con 5 aparatos en cada línea. Si dos de los aparatos resultaron defectuosos ¿de cuántas maneras se pueden distribuir los aparatos en las cinco líneas, cuando los dos defectuosos quedan en la línea uno? R = ___

PROBABILIDAD CONDICIONAL

6.- Supóngase que en un lote de 50 automóviles VW se repartirán aleatoriamente 20 para el mercado internoy 30 para el de exportación. Diez de los automóviles de exportación son de color blanco, y los otros 20 de color azul. Mientras que la mitad de los automóviles del mercado interno son de color blanco y la otra mitad azul. Si el gerente elige aleatoriamente un automóvil de color blanco

¿Cuál es la probabilidad de que dicho automóvil sea de exportación? R = ___

Teorema de Bayes:

7.- Un preso que se fugó es buscado por la policía, la cual está segura que el prófugo sólo puede seguir unode 5 caminos posibles 1, 2, 3, 4, 5. Los cuales puede elegir con las probabilidades, 0.20, 0.30, 0.10, 0.25 y 0.15, respectivamente.
Por las condiciones policíacas de cada una de las ciudades alas que puede llegar las probabilidades, respectivamente, de que pueda ser atrapado, son; 0.20, 0.10, 0.40, 0.30 y 0.40.

Calcule la probabilidad de que sea capturado. R= ______

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS.

8.- Un vendedor de equipo pesado puede entrevistar a uno o dos clientes diariamente con una probabilidad de 1 3 y 2 3, respectivamente. Cada entrevista tendrá como resultado una “no venta” o “una venta” de $50,000 (dólares) con probabilidades de 0.9 y 0.1, respectivamente. Obtenga la distribución de probabilidad para las ventas diarias.

Encuentre la media y la desviación estándar de las ventas diarias. R =___R = __

MODELOS DISCRETOS DE PROBABILIDAD.

9.- La revisión aduanal se efectúa en el Aeropuerto aleatoriamente, de la siguiente manera: En la salida se encuentra un semáforo, si al pasar la persona se activa la luz roja se realizará la revisión; en caso de activarsela verde, el viajero sale tranquilamente sin revisión. La luz roja aparece con una frecuencia del 10% . Si se consideran 18 viajeros, ¿Cuál es la probabilidad de que:

a).- 3 o más sean revisados? R = ___________ b).- menos de 5 sean revisados? R =______---

c).- ¿Cuántos de los siguientes 100 viajeros se espera sean revisados? R = ______

10.- Sea una máquina despachadora de refrescos que arroja un poco más de 20 ml por vaso derramándose ellíquido en un 5% de los vasos despachados. Podemos definir a la variable aleatoria X: “Cantidad de vasos despachados hasta obtener el primero que se derramará”. Considere que la forma de despachar el líquido porla máquina es independiente de vaso en vaso.

Calcule la probabilidad de que el primer vaso que se derrame se encuentre después del 15vo. Vaso despachado. R = ________________

ERRORES COMUNES EN LA ESTADÍSTICA (Y CÓMO EVITARLOS)

Maestría en Administración

Alejandro Zavala Huerta
Itzamat Tonatiuh Santiago Sosa
Susana Juárez Jiménez

Introducción

Este trabajo tiene la intención de mostrar los errores mas comunes en la estadística y las maneras de evitarlo según el libro “Errores comunes en la estadística y como evitarlos” de Good, Phillip I. & Hardin y James W.

Se presenta un resumen del libro para una practica y rápida comprensión con la finalidad de evitar en la medida de lo posible errores al realizar un análisis a través de procesos estadísticos.

El evitar cometer errores permitirá obtener el resultado mas aproximado a realidad, ayudando así a una mejor toma de decisiones.

Contenido

Capitulo 1. Fuentes de error	4
Capitulo 2. Hipótesis, el porque de su investigación	7
Capitulo 3. Recolectando datos	12
Capitulo 4. Hipótesis, prueba y estimación	16
Capitulo 5. Prueba de hipótesis, elección de un estadístico de prueba	19
Capitulo 6. Fortalezas y limitaciones de algunos procedimientos estadísticos misceláneos	23
Capitulo 7. Reporte de resultados	29
Capitulo 8. Gráficos	31
Capitulo 9, Regresión univariada	36
Capitulo 10. Regresión multivariable	41
Capitulo 11. Validación	44
Bibliografia	

Capítulo 1- Fuentes de error

Fuentes de error en procesos estadísticos

- Utilizar la misma información tanto para formular una hipótesis como para probarla
- Tomar muestras de la población equivocada
- No tomar muestras representativas
- Medir las variables equivocadas
- Usar métodos estadísticos equivocados o no apropiados
- No validar correctamente los modelos
- Dejar que el modelo estadístico tome las decisiones

Como evitar errores en el proceso de la toma de decisiones al utilizar métodos estadísticos

- Establecimiento de objetivos
- Definir la población
- Definir las posibles fuentes de variación
- Formular la hipótesis y todas las posibles alternativas
- Descripción de la muestra representativa
- Características de los estimadores utilizados
- Suposiciones del test a utilizar
- Reportes detallados

Conceptos para el diseño de experimentos y encuestas

- Variación
  - Siempre habrá variaciones
  - Siempre deben considerarse posibles errores debido a los instrumentos de medición y al observador

- Población
  - Perfectamente definida
  - Precisión

- Muestra
  - Es un subconjunto de la población
  - Tamaño adecuado de la muestra

Hipótesis

- Formular hipótesis antes de examinar la información
- Los patrones pueden sugerir pero no pueden confirmar las hipótesis
- El desarrollo de marcos en una serie de etapas permite la creación de modelos exitosos, validando cada modelo antes de presentar conclusiones

Capítulo 2- Hipótesis- El porque de su investigación

Prescripción

Métodos estadísticos y análisis: Esencial en proceso de toma de decisiones.

- Exponer objetivos y el uso que se le piensa hacer a la investigación.

- Previo a analizar un conjunto de datos existente.

- Formular hipótesis y todas sus alternativas.

- Enlistar posibles hallazgos experimentales.

- Enlistar conclusiones hipotéticas.

- Previo a llenar formulario de recopilación de datos.

¿Qué es una hipótesis?

- Bien formulada: Cuantificable como comprobable.

- Cantidades medibles, categorías mutuamente excluyentes.

- Una hipótesis bien formulada toma en cuenta:

- Alguna característica medible de una población toma un valor de un conjunto específico.

- Alguna característica medible toma diferentes valores en diferentes poblaciones.

- *Las diferencias toman un patrón específico o un conjunto específico de valores.*

Ejemplos

- "Para hombres mayores de 40 años que sufren de hipertensión crónica, una dosis de 100 mg la dosis diaria de este nuevo fármaco reduce la presión arterial diastólica en un promedio de 10 mm Hg."

- "Para los hombres mayores de 40 años que padecen hipertensión crónica, una dosis de 100 mg de este nuevo fármaco reduce la presión arterial diastólica un promedio de 10 mm Hg más que una dosis equivalente de metoprolol."

Observaciones

- Palabras como:
- “Todos”
- “No todos”
- “Ninguno”
- “Algunos”
- No son de naturaleza estadística
- Formule sus hipótesis para que sean comprobables, cuantificables y estadísticas en naturaleza.

Hipótesis nula

- Papel mítico en estadísticas contemporáneas
- Puede facilitar la investigación estadística.
  - Una prueba de permutación exacta.
- Nunca es obligatoria.
- Cualquier hipótesis cuantificable se puede convertir en nula.

Teoría de Neyman-Pearson 14

- Formular hipótesis alternativas al mismo tiempo que expone su hipótesis principal.
- Objetivo de investigación: Llegar a algún tipo de conclusión.
  - Tener no solo una hipótesis.
  - También una o más hipótesis alternativas.
- Establecimiento de pruebas
  - Tener una hipótesis alternativa o alternativas.
- Frecuentemente en investigaciones publicadas:
  - No se especifican hipótesis alternativas.

- Formular hipótesis alternativas al mismo tiempo que expone su hipótesis principal.
- Objetivo de investigación: Llegar a algún tipo de conclusión.
  - Tener no solo una hipótesis.
  - También una o más hipótesis alternativas.

- Preferiblemente:
  - Especificar alternativas antes de comenzar análisis.
  - Al mismo tiempo diseño de estudio.
- ¿Nuestras alternativas son unilaterales o bilaterales?
- ¿Están ordenados o desordenado?
- Forma determina: Estadística, procedimientos, significancia.
- Decidir previamente: Alternativa unilateral o bilateral.

Deducción e Inducción

- Las únicas declaraciones que pueden hacerse son:
  - "Nuestras conclusiones se ajustan a los datos"
- La naturaleza del mundo real es incognoscible.
- Podemos especular, pero nunca concluir.

Pérdidas

- Procedimiento estadístico óptimo depende:
  - Pérdidas asociadas con las decisiones posibles Lehmann [1986] .
- Aplicaciones prácticas reales, se ignora principio.
- En ese momento, los procedimientos estadísticos factibles se basaban:
  - Pérdidas eran proporcionales al cuadrado de la diferencia entre valores estimados y reales.
  - Opciones se limitaban por capacidad de cálculo.
- Ahora prestar atención a las pérdidas asociadas al tipo de decisión.
- ¿Qué perdidas están asociadas con las decisiones que tendremos que tomar?
  - Especificar antes de empezar.

Decisiones

- La dualidad hipótesis/alternativa no es apropiada en la vida real.
- Es esencial especificar acciones a tomar por cada resultado potencial.
- Si ningún resultado nos hace cambiar de opinión, no hay que realizar estudio.
- No solo queremos saber si un medible:
  - Produce impacto significativo.
  - También: Tamaño de efecto, medida en que varía de un caso a otro.
- Igualmente: Que factores (si hay) modifican el tamaño del efecto o su duración.
- Posiblemente no se aborden los temas en un solo conjunto de datos.
- Experimento preliminar: Posible existencia de un efecto, tamaño aproximado y viabilidad.
- Cada estudio de investigación implica múltiples cuestiones.
- Una lista de posibles decisiones:
  - Abandonar línea de investigación.
  - Modificar el entorno
  - Recopilar más datos
  - Realizar un conjunto de pruebas estrictamente controlado
- Cada decisión tiene un conjunto de ganancias potenciales y pérdidas.
- Antes de comenzar:
  - Enumerar todas las consecuencias del estudio.
  - Asimismo, acciones que se pueden tomar.
  - Persistir si se agrega conocimiento existente.

Capítulo 3- Recolectando datos

Preparación

TENER DEFINIDOS LOS OBJETIVOS (POR ESCRITO)

DESARROLLAR UNA O MÁS HIPÓTESIS

CONOCER EL TIPO DE RIESGOS QUE PUEDE OCURRIR EN CASO QUE EL ANÁLISIS RESULTE ERRÓNEO

REALIZAR UN ANÁLISIS EN EL REPORTE FINAL

SABER QUÉ INFORMACIÓN SE REQUIERE PARA JUSTIFICAR LAS CONCLUSIONES

Dispositivos de medición

CONOCER LO QUE SE DESEA MEDIR

EL SEGUNDO PRINCIPIO FUNDAMENTAL ES APLICABLE A LOS EXPERIMENTOS Y LAS ENCUESTAS, RECOLECTA TANTOS DATOS COMO SEAN POSIBLES

Experimentos y encuestas

- Los dispositivos de medición pueden medir un amplio rango, cuanto mayor sea la precisión con la que se realizan las mediciones
- Es importante tener dispositivos de mayor precisión, pero es necesario tener el conocimiento del alto costo y conocer el tiempo que se ocupará para la aplicación
- Las encuestas en línea representan una ventaja, sin embargo es necesario conocer a las personas que se encuestarán, ya que no siempre una mayor muestra es algo más beneficioso

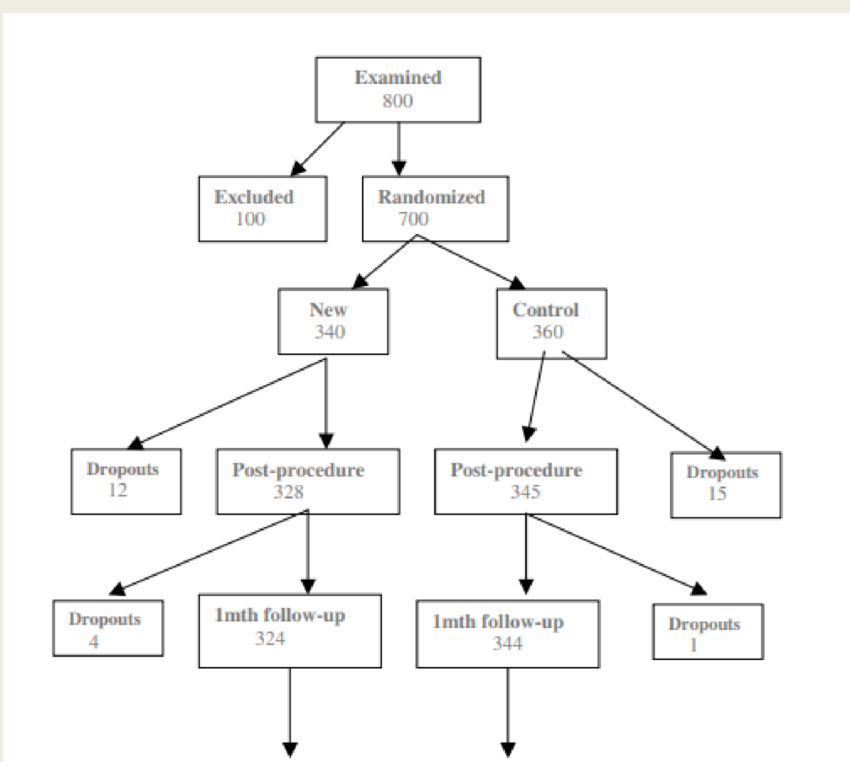
Determinando el tamaño de la muestra

- Nivel de relevancia y potencial
- No existe un valor universalmente correcto para el tamaño de muestra

Error Tipo I (α)	Probabilidad de rechazar falsamente la hipótesis cuando es cierto
Error Tipo II (1- β [A])	Probabilidad de aceptar falsamente la hipótesis cuando una hipótesis alternativa A es verdadera. Depende de la alternativa A
Poder = β (A)	Probabilidad de rechazar correctamente la hipótesis cuando la hipótesis alternativa A es verdadera. Depende de la Alternativa A

Preparación de datos faltantes

- La clave para un estudio exitoso es planificar abandonos o problemas que puedan surgir, comenzar las pruebas con algún múltiplo del numero requerido para alcanzar un nivel de poder y relevancia



Suposiciones fundamentales

- Observaciones independientes
  - Para garantizar la independencia de las respuestas, es necesario que otros no escuchen o conozcan sus respuestas
- Observaciones distribuidas idénticamente
  - La muestra tiene que realizarse con el mismo instrumento de medición y el mismo observador

Diseño experimental

- Controlar. Crear el entorno para el estudio: los sujetos, la forma en que se administra el tratamiento, la forma en que se obtienen las observaciones, el aparato utilizado para hacer las medidas y los criterios de interpretación, tan uniformes y homogéneo como sea posible.
- Bloqueo. Un médico podría estratificar la población en subgrupos basado en factores tales como la edad, el sexo, la raza y la gravedad de la afección y restringiendo las comparaciones a individuos que pertenecen a el mismo subgrupo. Un agrónomo querría estratificar en el base de la composición del suelo y el medio ambiente
- .Aleatorización. Asignación aleatoria de pacientes al tratamiento dentro de cada subgrupo de modo que los innumerables factores que no pueden ni ser controlados ni observados directamente tienen la misma probabilidad de influir en la resultado de un tratamiento como otro.

Cuatro directrices

- Aleatorizar
- Controles
- Observadores ciegos
- Ocultar asignación del tratamiento

Capítulo 4- Hipótesis, prueba y estimación

La estimación

- Toma de decisiones basada en estimaciones confiables y precisas
- La gran mayoría de los errores en la estimación se derivan de un error en lo que uno quería medir o lo que uno pensaba que estaba midiendo. Para evitarlo:
  - Revisar los protocolos y procedimientos previamente establecidos antes de comenzar
  - Realizar varias pruebas
  - Registrar variables que puedan llevar a una confusión
  - Monitorear la recolección de la información
  - Revisar la información al recolectarla

Características de los estimadores

- Imparcialidad

Las decisiones no deben depender de:

- un etiquetado accidental e irrelevante de la muestra

- las unidades en las que se esta realizando la medición

- el orden en el que se realizaron las observaciones

- Consistencia

- Entre mayor sea la muestra, el resultado se acercara mas a la realidad

- Eficiencia

- Siempre se preferirá un estimador con un mayor grado de precisión

- Robustez

Los estimadores para poblaciones normalizadas simétricas pueden no ser tan deseables en poblaciones simétricas, o cuando existe un riesgo de contaminación con valores extremos.

- Perdida minima

La precisión y las perdidas asociadas variarán entre cada muestra; el mejor estimador será aquel que tenga una menor perdida entre muestras

- Estimadores mini-max

- Una estimador que minimiza la pérdida máxima posible se denomina un estimador mini-máx

Otros criterios de estimación

- Características de la población a ser estimada
- Los estimadores de varianza mínima proporcionan resultados relativamente consistentes de una muestra a otra

*Elegir siempre el estimador que minimize las perdidas

- Mito de la máxima probabilidad

Un error común es que el estimador de máxima probabilidad tiene muchas propiedades deseables, que es imparcial y minimiza el error. Pero esto es cierto solo para una distribución normal

Intervalos de estimación

- Las estimaciones puntuales rara vez son satisfactorias; si las observaciones son continuas, la probabilidad de que una estimación puntual sea correcta es cero.
- El bootstrap no paramétrico puede ayudarnos a obtener un intervalo estimado de cualquier aspecto de la distribución, como la media, la varianza; siempre y cuando las observaciones sean independientes y todas vengan de distribuciones con el mismo valor del parámetro a ser estimado
- Aun conociendo la forma de la distribución de la población, el uso del bootstrap paramétrico para obtener estimaciones de intervalos puede resultar ventajoso ya que proporciona respuestas más precisas que las fórmulas de libros de texto o porque no existen fórmulas de libros de texto.

Mejora de resultados

- Se puede obtener intervalos mas estrechos de estimación y con un valor mas real, enfocándose en suficientes y admisibles estadísticas

Capítulo 5- Prueba de Hipótesis: Elección de un estadístico de prueba.

Comparación de las medias de dos poblaciones

- La prueba más común es: t de Student.
- Para proporcionar niveles exactos de significancia, todas las observaciones:
  - Deben ser independientes.
  - Estar bajo hipótesis nula.
  - Provenir de distribuciones normales idénticas.
- Incluso si la distribución no es normal:
  - Nivel de significancia de la prueba t casi exacto.
  - Tamaños de muestra superiores a 12.
- Hay pruebas más poderosas que la prueba t.
  - Permutación que reemplace las observaciones originales con sus puntajes normales
- Pruebas de permutación (2 muestras) se derivan:
  - Observar la distribución que tomaría la estadística de prueba.
  - Cada una de las asignaciones posibles a los tratamientos.
- Contra alternativas normales específicas, permutación 2 muestras:
  - Proporciona una prueba imparcial más poderosa.
- Para muestras grandes, el poder contra alternativas normales:
  - Casi lo mismo que t de Student.
- Frente a otras distribuciones: Puede ser superior.
  - Selección adecuada del estadístico de prueba.

Comparación de varianzas

- Probar la igualdad de las varianzas de dos poblaciones:
  - Problema clásico.
  - Muchas soluciones.
  - No del todo, exactas, robustas y potentes.
  - Existen muchas pruebas, ninguna es satisfactoria.
  - Cada una debe cumplir dos o más de las siguientes condiciones:

Las observaciones se distribuyen normalmente.

Los parámetros de ubicación de las dos distribuciones son iguales o difieren en una cantidad conocida.

Las dos muestras tienen el mismo tamaño.

Las muestras son lo suficientemente grandes como para que las aproximaciones asintóticas a la distribución del estadístico de prueba sean válidas.

Comparación de las medias de K muestras

- Su nivel de significancia depende en gran medida del supuesto de normalidad.
- La relación F es óptima para pérdidas que son proporcionales al cuadrado del error y es subóptima en caso contrario.
- La relación F es una estadística ómnibus que ofrece potencia integral contra muchas alternativas, pero ninguna ventaja particular frente a alguna en concreto.

Diseños experimentales de orden superior

- Advertencias similares son válidas para el enfoque ANOVA paramétrico para el análisis del diseño experimental de dos factores con dos adiciones:

- Los tamaños de muestra deben ser iguales en cada celda , es decir, el diseño debe ser equilibrado.
- Una prueba de interacción debe preceder a cualquier prueba de efectos principales.

Tablas de contingencia

- Una fuente de error importante en el análisis es:
  - *Asociar el estadístico chi cuadrado de Pearson con la distribución chi-cuadrado.*
- Los principales errores en la práctica radican en no informar todo lo siguiente:
- Si usamos una prueba de una o dos colas y por qué.
- Si las categorías están ordenadas o desordenadas.
- Que estadística se empleó y por qué.

Pruebas inferiores

- La violación de los supuestos puede afectar:
  - *Nivel de significancia y poder de la prueba.*
- Es preferible una prueba de permutación de dos muestras.
- El bloqueo reduce las diferencias entre los sujetos.
  - *Destacar diferencias entre los grupos de tratamiento.*

- El bloqueo también puede usarse:
  - *Se sospecha de variables de confusión.*
  - *Se midió los valores de estas variables mientras recopilaba datos.*
- Asegurar elección de estadística se óptima.
  - *Frente a la hipótesis alternativa de interés.*
  - *Para la función de pérdida apropiada.*

Múltiples pruebas

- Cuando realizamos varias pruebas en un estudio, es posible:
  - No haya espacio diario o interés para reportar resultados.
  - Pero es indispensable reportar el total de pruebas estadísticas realizadas.
  - Lectores saquen sus propias conclusiones en cuanto a importancia de los datos.
- Es posible desear corregir el nivel de significancia.
  - Utilizando métodos de corrección estándar para pruebas independientes.
- Varios paquetes estadísticos de varias pruebas dependientes del mismo conjunto de datos.
- Tanto la comparación como la estadística de prueba deben especificarse.
  - Antes de examinar los datos

Antes de sacar conclusiones

- Asegurarse de tomar en cuenta los datos faltantes.
- Haber entrevistado a los que no respondieron.
- Si los datos faltaban al azar.
  - *Específicos de uno o más subgrupos.*
- ¿Los datos faltantes de los experimentos y encuestas tienen una historia que contar?

Capítulo 6- Fortalezas y limitaciones de algunos procedimientos estadísticos misceláneos

Arranque (Bootstrap)

- Le permite reducir sus requisitos de tamaño de muestra reemplazando datos reales con datos simulados—No.
- Te permite dejar de pensar en tu problema, la estadística diseño y modelo de probabilidad—No.
- No es necesario hacer suposiciones—No.
- Se puede aplicar a cualquier problema—No.
- Solo funciona asintóticamente: el tamaño de muestra necesario depende del contexto.
- Produce niveles de significación exactos: nunca.

Limitaciones

La muestra no es representativa de la población porque es pequeña o sesgada

No se seleccione al azar

Sus componentes no son independientes entre sí

Metodologia Bayesiana

- Simplifica la combinación de una variedad de diferentes tipos de evidencia, pruebas de laboratorio, experimentos con animales y ensayos clínicos, y sirve como una ayuda eficaz para la toma de decisiones
- Permite evaluar evidencia a favor de una hipótesis nula. Y con muestras muy grandes, una hipótesis nula no es automáticamente rechazado
- Proporciona flexibilidad durante la realización de un experimento: se puede modificar los tamaños de la muestra, alterar los dispositivos de medición, cambiar las poblaciones de sujetos y redefinir los puntos finales

$$\Pr\{A \mid E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}\} = \frac{\Pr\{E_{n+1} \mid A\}\Pr\{A \mid E_1, \ldots, E_n\}}{\Pr\{E_{n+1} \mid A\}\Pr\{A \mid E_1, \ldots, E_n\} + \Pr\{E_{n+1} \mid \sim A\}\Pr\{\sim A \mid E_1, \ldots, E_n\}}$$

Teorema de Bayes

Aplicaciones del teorema de bayes

- Salas de audiencia y juicios
- Aplicaciones a experimentos y ensayos clínicos

Meta-análisis

- Es un conjunto de técnicas que nos permiten combinar los resultados de una serie de pequeños ensayos y estudios observacionales.
- Se puede obtener estimaciones más precisas de los efectos principales.
- Probar hipótesis a priori sobre subgrupos.
- Determinar el número de observaciones necesarias para ensayos aleatorios a gran escala.

Directrices para un meta-análisis

- Se debe preparar con anticipación un protocolo de investigación detallado para el meta análisis. Los criterios de inclusión y el método estadístico empleado deben documentarse en la sección de materiales y métodos del informe posterior.
- Debe limitarse a ensayos controlados aleatorios. La heterogeneidad en los resultados del ensayo debe documentarse y explicarse.
- No intentar comparar tratamientos investigados en estudios no relacionados
- Los datos de pacientes individuales, en lugar de estadísticas resumidas publicadas, a menudo se requieren para análisis de subgrupos significativos. Esta es una de las principales razones por las que favorecemos la tendencia moderna de las revisas de insistir en que todos los datos informados en sus páginas estén disponibles en el sitio web para todos los investigadores

Pruebas de permutación

- Las pruebas de permutación solo arrojan niveles de significación exactos si las etiquetas en las observaciones son débilmente intercambiables bajo la hipótesis nula. Por lo tanto, no se pueden aplicar con éxito a los coeficientes en una regresión multivariada.

Capítulo 7- Reporte de resultados.

El reporte debe incluir

- El diseño experimental y sus objetivos
- El análisis
- Las fuentes y la cantidad de información faltante
- El detalle completo de las asignaciones (dictadas y discretas)
- Definir en el reporte si la aleatorización empleada fue:

- actual

- convencional

- restringida o no

- simultanea, de bloques simultáneos o secuencial

Información faltante

- Reportar las excepciones existentes en números brutos y presentar análisis adicionales sobre estas excepciones
- Excepciones comunes

- No participaron. Elegibles y disponibles que no participaron en el estudio
- Inelegibles. En algunos casos se elige un sujeto que termina determinándose como ilegible
- Retiros. Sujetos incluidos en el estudio pero que no lo completan
- Cruces. Un sujeto puede ser asignado a dos o mas estudios al mismo tiempo
- Datos faltantes. Es común, cara y prevenible en muchos
- Es necesario analizar la información para asegurar que las proporciones de la información faltante son las mismas en todos los grupos
- Los métodos estadísticos tradicionales son aplicables solo si la información faltante no esta relacionada con el tratamiento

Las tablas

- Las tablas con medios marginales apropiados son a menudo el mejor método de presentar resultados, ocasionalmente reemplazado (o complementado) por diagramas (generalmente gráficos o histogramas). Los medios marginales pueden ser omitidos solo si ya han aparecido en otras tablas
- Las tablas que tratan de matrices de dos factores son sencillas, siempre que los límites de confianza, las desviaciones estándar mínimas y los errores estándar estén claramente asociados con el conjunto correcto de cifras. Las tablas que involucran tres o más factores no siempre son claras para el lector y es mejor evitarlas.

Error standard

- Uno de los errores más graves en las estadísticas es el uso de la notación "error estándar medio" para informar los resultados de un conjunto de observaciones.

Sin embargo:

- Para muestras pequeñas de 3 a 5 observaciones las estadísticas resumidas son virtualmente insignificantes
- Para muchas variables, independientemente del tamaño de la muestra, la media aritmética puede ser muy engañosa
- El error standard es una medida útil si las observaciones vienen de una distribución normal o Gaussiana.
- Si no se esta seguro que las observaciones vienen de una distribución normal se debe considerar presentar los resultados en un histograma

El valor p

- Los valores p derivados de las tablas son a menudo aproximaciones crudas, particularmente para muestras pequeñas y pruebas basadas en una distribución específica.

La gran mayoría de los valores p producidos por las pruebas paramétricas basadas en la distribución normal son aproximaciones.

- Antes de interpretar y comentar los valores de p, es bueno recordar que en contraste con el nivel de significación, el valor de p es una variable aleatoria que varía de muestra a muestra. Puede haber diferencias muy significativas entre dos poblaciones y, sin embargo, las muestras tomadas de esas poblaciones y el valor p resultante pueden no revelar esa diferencia.

Intervalos de confianza

- Los intervalos de confianza pueden derivarse de las regiones de rechazo de las pruebas de hipótesis, ya sea que estas últimas se basen en métodos paramétricos o no paramétricos.
- Un error común es malinterpretar el intervalo de confianza como una declaración sobre el parámetro desconocido.
- Los intervalos de confianza pueden utilizarse tanto para evaluar como para informar sobre la precisión de las estimaciones y la importancia de las pruebas de hipótesis. La probabilidad de que el intervalo cubra el valor verdadero del parámetro de interés y el método utilizado para derivar el intervalo también deben ser reportados.

Reconocimiento y reporte de sesgos

- Con una planificación cuidadosa y prolongada, se puede reducir o eliminar muchas fuentes potenciales de sesgo, pero rara vez es posible eliminarlas todas. Se debe aceptar el sesgo como inevitable y luego esforzarse por reconocer y reportar todas las excepciones.
- La mayoría de los sesgos ocurren durante la recolección de datos, a menudo como resultado de hacer observaciones de un subconjunto no representativo de la población en lugar de la población en su conjunto.
- La colaboración entre el estadístico y el experto es esencial para detectar y corregir todas las fuentes de sesgo, ya que muchos sesgos son específicos de un área de aplicación dada

Capítulo 8- Gráficos

KISS- Mantenlo simple, pero científico

- ¿Cuál es la dimensión de la información que ilustrará?
- ¿Necesitas ilustrar información repetida para varios grupos?
- ¿Es una ilustración gráfica el mejor vehículo para comunicar información al lector?
- ¿Cómo se selecciona de una lista de opciones de competencia?
- ¿Cómo sabe si el gráfico que produce está comunicando efectivamente la información deseada?

Los gráficos deben enfatizar y señalar las características más destacadas

- Deben revelar las propiedades de los datos.
- Hacer que gran cantidad de información sea coherente.
- Ilustraciones deben ser científicamente informativas y decorativas.
- Este capítulo describe errores en:
  - Selección, creación y ejecución de gráficos.
  - Discusión de mejoras para esas áreas.
- Gráficos deben ser simples y agradables a la vista.
  - No dejar de lado información científica.
- Un bien diseño gráfico:
  - Maximiza la proporción de tinta utilizada.
  - Para comunicar información científica en la presentación general.

5 reglas para evitar gráficos malos

- No produzca gráficos que muestren más dimensiones que las que existen en los datos.
- No superponga la información del etiquetado sobre los elementos gráficos de interés. Las etiquetas pueden agregar información al gráfico.
  - Pero deben colocarse en las partes no utilizadas de la región de trazado.

- No produzca gráficos que muestren más dimensiones que las que existen en los datos.

- No superponga la información del etiquetado sobre los elementos gráficos de interés. Las etiquetas pueden agregar información al gráfico.
  - Pero deben colocarse en las partes no utilizadas de la región de trazado.

- No permita que el rango de las etiquetas de los ejes reduzca significativamente el área dedicada a la presentación de datos.
  - Elija sabiamente los límites de los ejes.
  - No acepte automáticamente valores predeterminados para los ejes que están muy fuera del rango de datos.

- Considere cuidadosamente la naturaleza de la información subyacente a los ejes.
  - Las etiquetas de los ejes numéricos implican un rango continuo de valores.
  - Pueden resultar confusos cuando las etiquetas representan valores discretos de una variable categórica subyacente.

- No conecte puntos discretos, a menos que haya:
  - Un significado científico para la interpolación implícita.
  - Una colección de perfiles para resultados a nivel de grupo.

Una regla para el uso correcto de gráficos tridimensionales

- Use un gráfico de contorno sobre un gráfico de perspectiva.
  - Si no hay un buen punto de vista disponible.

- Siempre utilice un gráfico de contorno sobre el gráfico de perspectiva.
  - Cuando los ejes coordinan las coordenadas del mapa.

Una regla para el gráfico circular incomprendido

- No use gráficos circulares a menos que:
  - La suma de las entradas sea significativa científicamente.
  - De interés para el lector.

Reglas para la visualización eficaz de la información de los subgrupos

- Coloque los elementos de la leyenda en el mismo orden en que aparecen en el gráfico siempre que sea posible.

Dos reglas para elementos de texto en gráficos

- Los subtítulos de las presentaciones gráficas deben estar completos. No escatime sus descripciones.
- Mantenga al mínimo estilos de línea, colores y símbolos.

Pantallas multidimensionales

- Representar varias medias distintas para una colección de puntos:
  - Problemático, tanto textos como gráficos.
- Construcción de tablas para esta presentación:
  - Difícil.
  - Necesidad de comunicar efectivamente matriz de información subtabular.
- Es lo mismo en las pantallas gráficas.
  - Pero distinción de distintas cantidades es más fácil.

Elección de elementos de visualización efectivos

- Gráficos implican:
  - *Codificación de la información, diseñador gráfico.*
  - *Decodificación de la información, lector.*
  - *Cleveland y Mc Gill (1988).*
- Varias propiedades psicológicas afectan decodificación.
  - *Términos de percepción gráfica del lector.*
  - *V.gr. Cuando se presentan dos o más elementos.*
  - *Lector imaginará subproductos (textura implícita y sombreado).*
  - *Estos pueden distraer y confundir.*
- Pantallas gráficas representan:
  - *Elección del diseñador en términos de la información cuantitativa.*
  - *Deseo del ayudar al analista y lector al discernir*
  - *Rendimiento y propiedades de los datos.*
  - *Modelos asociados ajustados a los datos.*

Pantallas gráficas

- Cuando se confía plenamente en la capacidad del software para producir presentaciones científicas.
  - Autores se ven limitados en su dominio.
- La mayoría de los paquetes de software permiten a los usuarios:
  - Especificar las propiedades deseadas del gráfico.
  - Editar el gráfico para cambiar las propiedades individuales.
- La capacidad de seguir las pautas marcadas en este capítulo.
  - Se relaciona con el tiempo dedicado a aprender las características gráficas más avanzadas del software.
- El diseñador es libre de elegir:

- Formas geométricas para representar puntos.
- Color o estilo para las líneas y sombras.
- Texturas para representar áreas.

Capítulo 9- Regresión univariada

Selección del Modelo

Alcance limitado	Relaciones ambiguas
• Casi todas las relaciones tienen una parte lineal como no lineal, donde la parte no lineal es cada vez más evidente tanto para los valores extremadamente grandes como para los no lineales (valores extremadamente pequeños). Una ecuación de regresión puede usarse para la interpolación dentro del rango de valores medidos, estamos en terreno inestable si tratamos de extrapolar.	• Piensa por qué en lugar de qué, la naturaleza exacta de la fórmula que conecta dos variables no puede determinarse únicamente mediante métodos estadísticos. Si existe una relación lineal entre dos variables X Y, entonces también existe una relación lineal entre Y y cualquier función monótona de X

- La mejor regla de todas es no dejar que las estadísticas piensen por usted, indagar en los mecanismos que dan origen a los datos y que podría explicar la relación entre las variables X Y

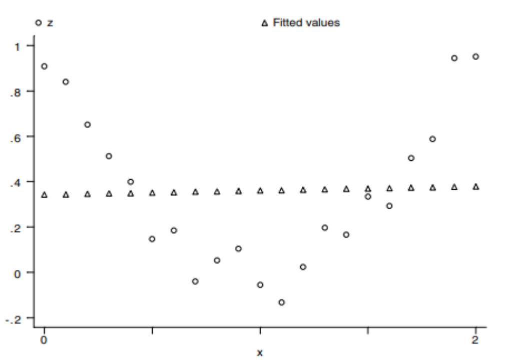


FIGURE 9.2 Fitting an Inappropriate Model.

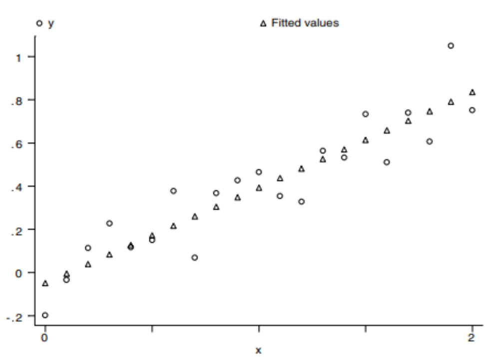
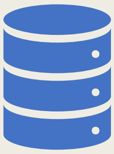


FIGURE 9.1 A Straight Line Appears to Fit the Data.



Modelos Inapropiados

Siempre grafique los datos antes de decidirse por un modelo.

Variables de confusión

Si se sospecha los efectos de variables adicionales distintas de X sobre Y, estos efectos adicionales deben tenerse en cuenta estratificando o realizando una regresión multivariada.

La paradoja de Simpson

- Ambos sexos muestran una reducción, sin embargo, la población combinada no lo hace.
- La resolución de esta paradoja se logra evitando una respuesta instintiva a la significación estadística
- Cuando la asociación está involucrada

	Grupo de tratamiento	
	Control	tratado
Vivo	4	8
Muerto	3	5

	Grupo de tratamiento	
	Control	tratado
Vivo	2	12
Muerto	3	15

	Grupo de tratamiento	
	Control	tratado
Vivo	6	20
Muerto	6	20

Coeficientes de estimación

Tres desafíos relacionados	Técnicas empleadas
• Estimación de los coeficientes de un modelo • Contraste de hipótesis sobre los coeficientes • Estimar la precisión de nuestras estimaciones	• La naturaleza de la función de regresión (lineal, no lineal, logística) • La naturaleza de las pérdidas asociadas a la aplicación del modelo • La distribución de los términos de error en el modelo, es decir, las ε´s • Si estos términos de error son independientes o dependientes

- Las estimaciones que obtengamos dependerá de nuestra elección de la función de ajuste. Nuestra elección no debe estar dictada por el software sino por la naturaleza de las pérdidas asociadas con la aplicación del modelo

Conveniencia

- En ocasiones no se puede medir directamente las variables, ya sea por carencia de fondos o la misma instrumentación limita el rango de observación.
- La presencia de disco sesgo no significa que debamos abandonar nuestros intentos de modelar, sino que debemos ser conscientes de nuestras limitaciones e informarlas.

Estacionariedad

- Si las variables que estamos midiendo sufren cambios estacionales u otros cambios detectables, entonces debemos tenerlos en cuenta. Se requiere un enfoque multivariante.

Significado práctico vs significado estadístico

- Una asociación puede tener significado estadístico sin tener el menor valor práctico.
- Un aumento de 100 veces en la concentración de fibra de asbesto se asocia con un aumento de quizá un 5% en las tasas de cáncer de pulmón.

Bondad de ajuste vs predicción

- Al usar los métodos de ajuste, podemos minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores observados y del modelo, podemos minimizar alguna función completamente diferente.
- No garantiza que las observaciones realizadas va a ser lo que predice nuestro modelo.
- Si es un hombre de negocios cuyo objetivo es predecir la respuesta del mercado, esta distinción puede ser fundamental.
- Hay 3 razones para la posible disparidad
  - La correlación original era falsa
  - La correlación original era genuina pero la muestra no era representativa
  - La correlación original era genuina, pero la naturaleza de la relación ha cambiado con el tiempo

Capítulo 10- Regresión multivariable

.

- Mismos problemas que la regresión no variable mas los propios
- Los métodos de permutación exactos no existen en la regresión multivariable
- Al seleccionar variables para incorporarlas en un modelo multivariable es necesario repetir las pruebas de hipótesis; la solución (si se tienen suficientes datos) será dividir los datos en dos partes, una para seleccionar las variables y la otra para la prueba
- Cuando el objetivo es verificar la asociación entre las variables explicativas predeterminadas y la variable de respuesta, el análisis de regresión lineal múltiple permite proporcionar una o más variables confusas que no podrían controlarse de otra manera.

Generalización de modelos lineales

- Actualmente la mayoría del software estadístico incorpora nuevos algoritmos avanzados para el análisis de modelos lineales.
- La naturaleza de la relación entre la variable de resultado y los coeficientes depende de la función de enlace especificada en el modelo.
- Los modelos incluyen:

- Efectos fijos. Se agrega y usa una variable indicador por cada sujeto para ajustar el modelo
- Efectos fijos condicionados. Se utiliza en regresión logística, de Poisson y binomial negativa. Se utilizan estadísticas para derivar una probabilidad condicional que permita eliminar el efecto del nivel del sujeto..
- Efectos aleatorios. La elección de una distribución para el efecto aleatorio con demasiada frecuencia es impulsada por la necesidad de encontrar una solución analítica al problema, en lugar de por cualquier conocimiento real. Aun teniendo en cuenta el conocimiento de la verdadera distribución de efectos aleatorios, no es fácil comparar los resultados ajustados con los parámetros verdaderos.
- GEE (Ecuación de estimación generalizada). En lugar de tratar de derivar la ecuación de estimación para GLM (modelos lineales generalizados) con observaciones correlacionadas a partir de un argumento de probabilidad, la correlación dentro del sujeto se introduce en la ecuación de estimación en sí.
- HLM (Modelos lineales jerárquicos). Mientras que los otros modelos están limitados a un solo efecto , los HML permiten mas de uno.
- Modelos mixtos. Permite efectos tanto lineales como no lineales; esto permite especificar cada nivel de medidas repetidas.

Reportando los resultados

- Es necesario ser explicito acerca de:

- Los métodos utilizados

- Las asunciones hechas

- Las limitaciones en el rango de aplicación del modelo

- Las fuentes potenciales de sesgos

- El método de validación

Capítulo 11- Validación

- *- … La simple idea de dividir una muestra en dos y luego desarrollar la hipótesis sobre la base de una parte y probarla en el resto podría decirse que es una de las más seriamente olvidadas en estadística. Si medimos el grado de negligencia por la relación entre el número de casos en los que realmente se usa.-*
  - *GA Barnard en discusión siguiendo a Stone (1974, p.133)*
- *Valide sus métodos antes de sacar conclusiones.*

Verificación independiente

- Es preferible y apropiada cualesquiera que sean los objetivos del modelo y:
  - *Ya sea seleccionando variables para su inclusión.*
  - *Estimando los coeficientes del modelo.*
- Ayuda a discriminar entre varios modelos:
  - *Parecen proporcionar buenos ajustes a los datos.*
- Su puede utilizar junto con los otros dos métodos de validación.
- Puede obtenerse también por el uso de variables sustitutas o proxy.

División de muestras

- Es apropiado para validar modelos de series temporales.
  - *Énfasis está en la predicción o la reconstrucción.*
  - *Observaciones más recientes deben reservarse para fines de validación.*
  - *De lo contrario, los datos deben extraerse al azar de toda la muestra.*
- Desafortunadamente al usar la muestra y tomar parte de ella.
  - *Las estimaciones serán menos precisas.*
- Browne (1975) sugiere agrupar en lugar de dividir la muestra si:
  - *Se especifican de antemano las variables predictoras a emplear.*
  - *Las estimaciones obtenidas de una muestra de calibración extraída se aplicarán a otros miembros de la población.*

Remuestreo

- 5 técnicas de re muestreo de uso general:

Pliegue en K, subdividimos los datos en K partes de aproximadamente el mismo tamaño.

- *Luego repetimos el proceso de modelado K veces.*
- *Se deja una sección fuera cada vez (con fines de validación).*

Dejar uno fuera, un ejemplo extremo de pliegue en K.

- *Subdividimos en tantas partes como operaciones.*
- *Dejar una observación fuera del procedimiento y usar las n-1 observaciones restantes como un conjunto de entrenamiento.*
- *Repitiendo este procedimiento n veces:*
- *Llegamos a una cifra para el número y porcentaje de operaciones clasificadas correctamente.*

Jackknife, una generalización obvia del enfoque de dejar uno fuera.

- *El número dejado fuera oscila entre una observación y la mitad de la muestra.*

Eliminar-**d**, donde se reserva un porcentaje aleatorio **d** de las observaciones para propósitos de validación.

- *Usamos el 100 restante* ***–d%*** *como un conjunto de entrenamiento.*
- *Luego promediamos 100 y 200 muestras aleatorias independientes.*

El boostrap, ya especificado en capítulos anteriores. **(?)**

Medidas de éxito predictivo

- Uso de coeficiente de determinación (R al cuadrado).
- El R2 ajustado según Rencher y Pun (1980) tiene dos grandes problemas:

El algoritmo asume que los predictores son independientes.

- *En realidad, los predictores están correlacionados muy a menudo.*

Si el grupo de predictores potenciales es grande:

- *Se realizan múltiples pruebas.*
- *En consecuencia, R2 se infla.*
- *El algoritmo para R2 ajustado no corrige esta inflación.*

Incertidumbre en las predicciones

- Independientemente de la medida que se utilice
  - *Debemos reportar el grado de incertidumbre en las predicciones.*
- Para este propósito se usan comúnmente las barras de error.
- El error de predicción es mayor cuando:
  - *Los datos del predictor están lejos de las medias del periodo de calibración.*
  - *Viceversa.*

Estabilidad a largo plazo

- El tiempo es una dimensión oculta en la mayoría de los modelos económicos.
- Para evitar una –libra de cura-:
  - *Trate cada modelo como tentativo, sujeto a cambios sin previo aviso.*
  - *Monitorear continuamente.*
- La mayoría de los algoritmos de control toman la siguiente forma:
  - *Si el valor real excede algún límite.*
  - *Si el valor real supera el valor predicho durante tres periodos de observación seguidos.*
    - Suene la alarma o recalibre el modelo.

Bibliografía

- Good, Phillip I. & Hardin, James W. (2003)

  Common errors in statistics (and how to avoid them)

  New Jersey, USA: Wiley-Interscience